# مفاهيم أساسية في

# الهندسة

## ( لطلبة كليات العلوم التربوية )


الدكتور

**محمد مصطفى العبسي**

كلية العلوم التربوية الجامعية ( الأونروا )

الدكتورة

**إيمان رسمي عبد**

كلية العلوم التربوية الجامعية ( الأونروا )







الإعصار العلمي

دار الإعصار العلمي للنشر والتوزيع

دار الإعصار العلمي للنشر والتوزيع

مفاهيم أساسية في

# الهندســـة

(لطلبة كليات العلوم التربوية)

# مفاهيم أساسية في
# الهندسة
## (لطلبة كليات العلوم التربوية)


تأليف

الدكتور
محمد مصطفى العبسي
كلية العلوم التربوية الجامعية (الأونروا)

الدكتورة
إيمان رسمي عبد
كلية العلوم التربوية الجامعية (الأونروا)



الطبعة الأولى

2014م – 1435هـ




**رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2013/10/3618)**

519

العبسي، محمد مصطفى

مفاهيم أساسية في الهندسة لطلبة كليات العلوم التربوية/ محمد مصطفى العبسي، ايمان رسمي عبد.- عمان: مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع.2013.

( ) ص

ر.أ. : 2013/10/3619

الواصفات: /الهندسة (رياضيات)//الهندسة المستوية/

- يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى.



***الطبعة العربية الأولى***

**2014م – 1435هـ**




الاردن - عمان - مرج الحمام - شارع الكنيسة - مقابل كلية القدس

هاتف 0096265713906 فاكس 0096265173907

جوال: 00962797950880

Dar_aleasar@hotmail.com

ISBN 978-9957-524-46-3 (ردمك)

الفهـرس

# المحتويات

## الفهرس

| الموضوع | الصفحة |
|---|---|

# الفهرس

| الموضوع | الصفحة |
|---|---|

الفهـرس

# المقدمــة

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على رسول الله، وبعد

تعدّ الهندسة من الموضوعات التي لا غنى عنها في أي منهاج رياضيات لجميع الصفوف في المراحل الدراسية المختلفة، حيث لا يكاد يخلو أي كتاب رياضيات من وحدة أو وحدتين حول موضوعات الهندسة، ويتم تنظيم هذه الوحدات منطقياً وسيكولوجياً عبر الصفوف المختلفة.

ويعدّ تعليم الهندسة لطلبة المرحلة الأساسية من أهم الكفايات التي يجب أن يمتلكها المعلم الذي سيدرّس طلبة تلك المرحلة؛ مما يتطلب منه الوعي والإدراك بالمفاهيم والمهارات والنظريات الهندسية، التي تعمل على اكتساب المعلم المعرفة اللازمة للقيام بدوره في العملية التعليمية التعلمية.

ويأتي هذا الكتاب في تسعة فصول، تناول الفصل الأول ماهية الهندسة وتطورها، أما الفصل الثاني فقد تضمّن عرضاً لمفاهيم أساسية في علم الهندسة، اشتملت على مفاهيم غير معرّفة ومفاهيم معرّفة، فيما تناول الفصل الثالث أساليب البرهان الرياضي: المباشر وغير المباشر، وقد تم تخصيص الفصل الرابع للحديث عن الإنشاءات الهندسية باستخدام المسطرة غير المدرّجة والفرجار.

وتناول الفصل الخامس مفاهيم وحالات التطابق والتشابه والتكافؤ للأشكال الهندسية، وبعض النظريات والتطبيقات على كل منها، فيما تناول الفصل السادس وحدات قياس: الطول والمساحة والحجم والسعة والكتلة ودرجة الحرارة والزمن، مع تطبيقات رياضية على كل منها، وقد تم إفراد الفصل السابع للحديث عن الدائرة ونظرياتها، فيما تناول الفصل الثامن الهندسة الإحداثية أو التحليلية أو المستوية، وتم تخصيص الفصل التاسع والأخير للتحويلات الهندسية

الأربع: الانعكاس والانسحاب والدوران والتمدّد، مع عرض خواص كل تحويل هندسي.

وفي الختام نرجو أن نكون قد وفقنا في تحقيق الهدف المنشود من هذا الكتاب، من خلال تقديم كتاب مختص بالهندسة لطلبة كليات العلوم التربوية، الذين يتم إعدادهم ليكونوا معلمي طلبة المرحلة الأساسية الدنيا، ويمكن أن يسترشد به الطلبة ومعلمو الرياضيات لصفوف المراحل المختلفة.

والله الموفق

المؤلفان

## الفصل الأول

# ماهية الهندسة وتطورها

1 – 1 ماهية الهندسة.

1 – 2 الملامح التاريخية لتطور الهندسة.

1 – 3 نشأة الهندسة المستوية.

1 – 4 مكونات البناء الرياضي.

1 – 5 خصائص البناء الرياضي.

1 – 6 أسئلة للمناقشة.

# الفصل الأول

# الفصل الأول
# ماهية الهندسة وتطورها

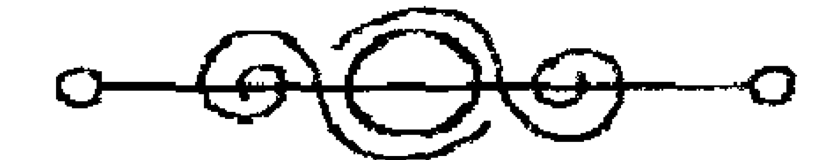
## 1-1 ماهية الهندسة:

تعتبر الهندسة من الفروع الأكثر قدماً في الرياضيات، وتبرز أهمية الهندسة لأسباب عديدة، فالعالم يفيض بالأشكال الهندسية التي تحيط بنا من كل جانب لذلك سيكون فهمنا وتقديرنا لعالمنا أفضل لو تعلمنا شيئاً عن الهندسة. وللهندسة أيضاً تطبيقات عملية في مجالات عدة. فالمعماريون يحتاجون لفهم خواص الأشكال الهندسية لتشييد مبانٍ آمنة وجذابة. كما يستخدم المصمِّمون والمهندسون المشتغلون بالمعادن والمصوِّرون مبادئ الهندسة في أداء أعمالهم.

إن أصل كلمة «Géométrie» يعود إلى اليونان. والكلمة مكونة من جزأين "Géo" الصادر من"Gaia" ويعني الأرض، و "Métrie" الصادر من "Métron" ويعني قياس. فالهندسة تعني إذن عند اليونان "قياس الأرض". وتعرف عادة كعلم أشكال الفضاء، فهي تُعنى بدراسة هيئات وأحجام ومواضع الأشكال الهندسية. وهذه الأشكال تشمل الأشكال المستوية كالمثلثات والمستطيلات والأشكال المجسَّمة (ثلاثية الأبعاد مثل المكعبات والكرات). ويمكن النظر إلى الهندسة على أنها:

1. علم للفضاء.
2. نموذج للدقة الرياضية في مجال التجريد والتعميم والتفكير الرياضي.
3. منشط للقدرة على الاستدلال، أي أنها أداة تعمل على تنمية الوعي لما تتميز به البراهين من طبيعة مفيدة ومنتجة.
4. لغة للكشف والاستنباط، تنبع فعالية الهندسة على تعلم الاستنباط من الفرص التي تتيحها لتمثيل مفاهيم رمزية بشكل دقيق وواضح قد يتعذر الوصول إليها إذا كتبت بطرق أخرى.

5. فن للتحويل لأنها تدرس تعديلات الأشكال الهندسية أو ما يمثلها، مع ما يصاحبها من ثوابت. فكثير من خواص الأشكال الهندسية المألوفة مثلا يمكن إثباتها عن طريق التناظر. ويمكن الحصول على كثير من الخواص الهندسية عن طريق تحويل شكل عام إلى شكل معياري (من خلال المنظور يمكن تحويل المضلع الرباعي إلى مربع والقطاع المخروطي إلى دائرة...). وهذا يتطلب مستوى من التفكير الهندسي الذي يعطي أهمية لشكل عملية التحويل أكثر من الأشكال المحولة نفسها.



## 1-2 الملامح التاريخية لتطور الهندسة:

ارتبط تطور الهندسة عبر العصور بحضارة معينة من الحضارات التي سادت هذا العالم. ومن أبرز ملامح هذه الحضارات ما يلي:

**الهندسة عند القدماء المصريين:**

نشأت الهندسة عن حاجة قدماء المصريين إلى مسح الأراضي الغائبة المعالم، للتمكّن بإنصاف من توزيع مساحاتها الخصبة المغطّاة بالوحل الذي يتركه الفيضان السنوي لنهر النيل ويتضح ذلك من الأعمال الهندسية والمعمارية التي اشتهر بها قدماء المصريين التي تبين معرفتهم بكثير من الأصول الهندسية، فقد تمكنوا من مسح الأرض الزراعية وتقسيمها إلى أحواض و حفروا الأنفاق والمناجم بزوايا مناسبة.

وتحتوى البرديات الرياضية المصرية المكتشفة حتى الآن على معلومات هندسية متقدمة تبين قدرة المصريين على حساب أطوال أوتار الدائرة وأنهم عرفوا المثلثات وأشباه المنحرف والأهرامات وقوانين حجومها وعرفوا كذلك نصف الكرة

وكيفية إيجاد مساحة سطحها، كما أن هناك بعض الأدلة التي أثبتت أن المصريين القدماء كانوا يعرفون قانون مساحة الدائرة وحجم الأسطوانة القائمة وكذلك كانوا يعرفون أن مساحة أي مثلث "عبارة عن حاصل ضرب القاعدة في نصف الارتفاع" كما ورد في بردية أحمس أن مساحة الدائرة تساوى 9/8 قطرها.

**الهندسة عند البابليين:**

عرف البابليون كثيرًا من الأصول الهندسية. وقد كان لديهم أكثر مما عند المصريين، فعلى سبيل المثال استعمل البابليون نظرية فيثاغورس في حالات كثيرة، بينما توصل المصريون القدماء فقط إلى أن المثلث الذي أضلاعه: 3،4،5 يكون مثلثاً قائماً. كما أنهم قسموا محيط الدائرة إلى ستة أقسام متساوية وإلى 360 قسماً متساوياً، ومن هذا التقسيم أمكن تقسيم الساعة إلى 60 دقيقة، والدقيقة إلى 60 ثانية.

**الهندسة عند الإغريق:**

كانت الرياضيات في الحضارات القديمة تتبع الأسلوب الاستقرائي فالنتائج الرياضية لم تكن مضبوطة ودقيقة، بل كانت تقريبية.

أما عند الإغريق، فقد اتجهت الرياضيات إلى الأسلوب الإستنتاجى الذي بدأه فيثاغورس بإثبات نظريته المشهورة التي كانت سبباً مباشراً في إغفال علمي الحساب والجبر وعدم تطورهما تطوراً يضاهى علم الهندسة. فعندما طبق فيثاغورس نظريته على الأعداد، ظهرت لديه مشكلة الأعداد غير النسبية التي لا يناظرها طول هندسي وبذلك أصبحت الهندسة هي العلم الأساسي عند الإغريق. وتعد الهندسة عند الإغريق بداية جمع وتنظيم الهندسة على أساس منطقي، ففي عام 300 قبل الميلاد بدأ إقليدس في وضع كتابه الشهير "الأصول" (Elements).

ويُعد هذا الكتاب أول كتاب ينظم الهندسة على أساس رياضي مقبول و الأهم من ذلك هو استخدام طريقة المسلمات لجمع الهندسة وتنظيمها بطريقة منطقية بعد أن كانت عبارة عن حقائق متناثرة ليس لها وحدة قائمة، وقد اشتهر عدد من فلاسفة اليونان في الهندسة ومنهم:

1. طاليس المالطي (639 – 440 ) قبل الميلاد:

لقد تمكن من قياس ارتفاع الهرم بتطبيق نظرية تشابه المثلثات على قياسين هما قياس ظل الهرم وقياس ظل عصا ثبَتها عمودياً، كما ينسب إلى طاليس عدد من نظريات الهندسة، منها:

- أن زاويتي قاعدة المثلث المتساوي الساقين متساويتان.
- الزاوية المحيطية في نصف دائرة قائمة.
- يتطابق المثلثان إذا تساوى في كل منهما زاويتان وضلع.

2. فيثاغورس (850 – 497) قبل الميلاد

درس فيثاغورس العلوم والرياضيات في كل من مصر وبابل، وأقام في كل منهم اثنتي عشرة سنة صاغ فيها العديد من المعلومات الرياضية والتي عرفت باسمه ولعل من أشهرها نظرية فيثاغورس المعروفة.

3. إقليدس السكندري

يعد إقليدس مؤسس الهندسة المستوية، حيث يعد كتاب "الأصول" أو "المبادئ" الذي ألفه حوالي عام 300 قبل الميلاد هو أهم الكتب التي وضعت في العصر السكندري في الرياضيات، وهو المصدر الذي أخذ منه علماء الشرق والغرب حتى القرن التاسع عشر الميلادي حين بدأ ظهور الهندسة الإقليدية.

**الهندسة عند العرب والمسلمين:**

لقد كان للعلماء العرب والمسلمين باع طويل في حفظ وتطوير الهندسة التي نقلوها عن الإغريق ثم أضافوا عليها، وهذبوها، وشرحوها، وألفوا فيها الكتب الكثيرة.

وقد ترجم العرب كتاب الأصول لإقليدس، وزادوا على نظرياته، وألفوا كتباً على نسقه وأدخلوا تمارين جديدة لم يعرفها القدماء، وقد وضع ابن الهيثم كتابا من هذا الطراز، كما ألف محمد البغدادي رسالة في الهندسة، فيها سبع مقالات في المثلث، وتسع في المربع، وست في المخمس.

وقد ألّف ابن الهيثم كتاباً جمع فيه الأصول الهندسية والعددية من كتاب إقليدس وأبولونيوس، وللعلماء العرب مؤلفات كثيرة في المساحات والحجوم، وتحليل المسائل الهندسية، واستخراج المسائل الحسابية بالتحليل الهندسي والتقدير العددي. وفي موضوعات أخرى كتقسيم العرب الزاوية والتطبيقات العملية في شئون حياتهم، ومجتمعاتهم، والنسبة بين محيط الدائرة إلى قطرها المعروف بالنسبة التقريبية (22÷7).

كما استطاع البيروني أن يوجد محيط الأرض بدقة، كما أوجد طريقة جديدة لحساب مساحة المثلث بدلالة أضلاعه وهو يختلف عما أتى به هيرون، وفى مؤلفات البيروني نظريات هندسية وطرق للبرهنة عليها وهى طرق جديدة فيها ابتكار وعمق وتختلف عما ألفه فلاسفة ورياضيو اليونان.

كما أن عمر الخيام ونصر الدين الطوسي يعدان من أوائل من فتح الباب لإيجاد هندسيات غير إقليدية كثيرة، فعمر الخيام هو أول من استخدم الشكل الرباعي في محاولة لإثبات المسلمة الخامسة لإقليدس، وهذا الشكل استخدمه الخيام من بعد الطوسي وهو الشكل الذي استخدمه ساكيري فيما بعد وسُمي باسمه.

**1 – 3 نشأة الهندسة المستوية:**

نشأت الهندسة المستوية المألوفة، التي أخذت تعرف لاحقاً بهندسة إقليدس، في حضارات شرقي المتوسط القديمة (مصر والهلال الخصيب) وازدهرت هناك، ثم انتقلت إلى أيونيا وأثينا الإغريقيتين واتخذت هناك طابعاً أكثر تماسكا من الناحية المنطقية النظرية. وما إن جاء القرن الثالث قبل الميلاد حتى تبلورت على صورة نظام منطقي علمي متكامل في كتاب للرياضي الإسكندراني الهلنستي المعروف إقليدس أسماه الإغريق "المبادئ" أو "الأصول" وأسماه العرب "الاسطقسات". وهو يتكون من ثلاثة عشر جزءاً (أو كتاباً). ويتضمن الكتاب الأول ثلاثة وعشرين تعريفاً وخمس مصادرات وخمس أفكار شائعة، كما أسماها إقليدس. وتشكل تلك أساساً منطقياً لثمانٍ وأربعين قضية رياضية في الكتاب الأول وعدد أكبر منها في الكتب اللاحقة. ويحتوي كتاب "الأصول" على نظام منطقي كامل ومتكامل ومحكم ينبع فيه حشد كبير من القضايا الهندسية من عدد محدود من المسلمات والتعريفات والمصادرات وفق قواعد منطقية صارمة جلية في ذاتها. لذلك اعتبر هذا النظام الهندسي المحكم لمدة ألفي عام المثال الأعظم على المعرفة العلمية اليقينية. فمنطقه محكم صارم من الصعب إثارة أدنى الشكوك حوله. كما إن مسلماته ومصادراته بدت جلية في ذاتها وعصية على الإنكار. لذلك اعتبر فيثاغورس، الذي ساهم مساهمة كبيرة في تأسيس النظام الهندسي الذي اكتمل لاحقاً في "أصول" إقليدس، هذا النظام جوهر الوجود المادي. ولذلك أيضا اعتبره أفلاطون، الذي يظن أن إقليدس كان ينتمي إلى مدرسته، مفتاحاً لعالم المثالات الخالد. أما في الحضارة الحديثة، فقد اعتبره أبو الفلسفة الحديثة، رينيه ديكارت، المثال الذي يستمد منه منهج إنتاج المعرفة اليقينية. وصاغ نيوتن كتابه الرئيسي "المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية" على صورة "أصول" إقليدس ومثالها. وكذلك فعل الفيلسوف إسبينوزا في صوغ كتابه الفلسفي الرئيسي "الأخلاق". أما الفيلسوف الألماني كانط فقط اعتبر نظام إقليدس الهندسي الأداة الحدسية التي يصوغ بها

## ماهية الهندسة وتطورها

العقل مادة الحس الخام وينظمها في خبرة حسية ذات معنى. واعتبر يقينية هذا النظام نابعة من كونه ركناً جوهرياً من أركان العقل يسلطه على الشيء في ذاته لتشكيل العالم المادي. إلى هذا الحد اعتبر نظام إقليدس يقيناً ومحكماً.

لقد صاغ إقليدس عشر فرضيات استند إليها في اشتقاق نظريات الهندسة اللاإقليدية المعروفة، كما ضمت هذه الفرضيات خمس بديهيات (Axioms) رياضية عامة وخمس مسلمات (Postulates) خاصة بالهندسة.

والبديهيات الخمس هي:

1. الأشياء المساوية لشيء واحد متساوية فيما بينها.
2. إذا أضيفت أشياء متساوية إلى أخرى متساوية تكون النواتج متساوية.
3. إذا طرحت أشياء متساوية من أخرى متساوية تكون النواتج متساوية.
4. الأشياء المتطابقة متساوية.
5. الكل أكبر من الجزء.

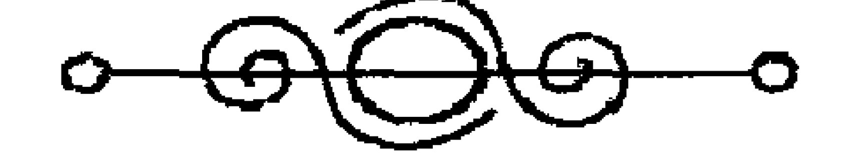
أما المسلمات الخمس هي:

1. يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمر بأي نقطتين مختلفتين.
2. يمكن مد الخط المستقيم من طرفيه إلى أي طول.
3. يمكن رسم دائرة إذا علم مركزها ونصف قطرها.
4. كل الزوايا القائمة متساوية.
5. إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين واقعين في المستوى نفسه، بحيث يكون مجموع الزاويتين الداخلتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع أصغر من قائمتين فإن المستقيمين يتلاقيان إذا مدا في تلك الجهة من القاطع.

وحيث أن هندسة إقليدس هي أقدم الأنظمة البديهية، أو على الأصح هي البداية لهذه الأنظمة؛ لذلك فمن المتوقع أن يكون بها بعض الخلل أو الأخطاء المنطقية القليلة جاءت نتيجة لعدم التجريد الكامل في هذا النظام البديهي، حيث أن الاعتماد على بديهيات غير مجردة تماماً يفسح المجال للحدس الهندسي الذي ربما يقود إلى نتائج غير منطقية.

ومع ذلك فإن هذه الهفوات التي وقع فيها إقليدس كان لها الأثر الصالح على تقدم الهندسة، فهندسة إقليدس أصبحت مجالاً للشك والمناقشة والبحث منذ ظهورها، مما أدى إلى محاولات كثيرة لإصلاحها، ومن خلال هذه المحاولات نتجت أشياء كثيرة ومفيدة لتقدم الرياضيات.

أما فيما يخص المسلمة الخامسة فإن لها أثراً كبيرا على تطور جميع فروع الرياضيات، فهذه المسلمة تبدو غريبة عن بقية المسلمات الأربع الأخرى. فهي تبدو بسيطة العبارة كبقية المسلمات، ومعناها الهندسي ليس واضحاً كوضوح المعنى لبقية المسلمات؛ لذلك فقد تطرق إليها الشك منذ البداية فهي تبدو كنظرية يمكن إثباتها أو على الأقل استبدالها بمسلمة أبسط منها؛ ولذلك فقد جرت محاولات كثيرة لإثباتها كنظرية، وأسهمت هذه المحاولات الكثيرة في اكتشاف هندسات أخرى جديدة مثل الهندسة الفراغية.



## 1 – 4 مكونات البناء الرياضي

تعتمد الهندسة كأحد فروع الرياضيات على دراسة البنية الرياضية (Mathematical Structure)، والبنية الرياضية هي بنية افتراضية مبنية على المسلمات (Axiomatic) تضم مجموعة من العناصر التي نضع لها هيكلاً، أي مجموعة القواعد والعلاقات التي تحدد طرق العمل.

وتتكوَن البنية الرياضية من:

1. المصطلحات أو التعابير الأولية غير المعرَفة (Undefined Terms) مثل: النقطة، والخط المستقيم، والفضاء، والبينية.
2. المفاهيم المعرَفة (Defined Terms) مثل: الدائرة حيث تعرَف بأنها المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى تبعد بُعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة، يُسمى البُعد الثابت نصف القطر، وتُسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة.
3. المسلمات (Postulates) وهي عبارات يقبل بصحتها دون برهان، مثل: " يمكن مد الخط المستقيم من طرفيه إلى أي طول".
4. النظريات والنتائج (Theorems & Results) وهي عبارات يجب إثبات صحتها، مثل: "العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها غير مار بالمركز ينصفه".

ويمكن تشبيه البناء الرياضي بالشجرة وأجزائها حيث المفاهيم المعرَفة وغير المعرَفة تلعب دور جذورها الشعرية والأساسية؛ والمسلمات دور ساقها والنظريات الأساسية دور فروعها والنتائج دور أغصانها بينما تطبيقاتها الهندسية دور ثمارها.

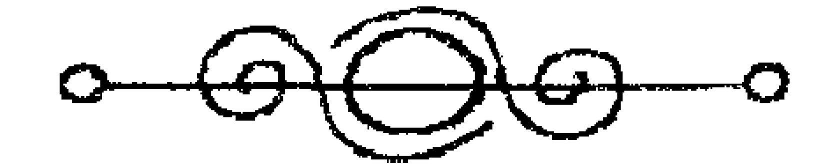


## 1 – 5 خصائص البناء الرياضي:

قد تبدو البنية الرياضية (الافتراضية) بهذا الوصف سهلة، ومغرية لكل من أراد أن يلهو بهذا النوع من الألعاب. إلا أن الرياضيين وضعوا خصائص للمسلمات لكي تستطيع أن تؤدي دورها في لحم البنية الرياضية. وليست جميع هذه الخصائص متساوية في الأهمية، أو مرغوب فيها من ناحية تربوية. وأهم هذه الخصائص:

1. **التآلف (التوافق) أو عدم التناقض (Consistency):** وتعني عدم التناقض بين المسلمات نفسها أو النظريات المشتقة منها، أو عدم وجود نتيجتين متناقضتين. وتوفُر هذه الخاصية في البنية الرياضية أمر ضروري، ومرغوب فيه، من الناحيتين الرياضية، والتربوية. إن أنجح طريقة لإثبات تآلف أي نظام من المسلمات هي تكوين نموذج (Model) لها تحدد فيه معان معينة للمصطلحات والمسلمات في البنية الافتراضية، فإذا كان هذا النموذج متآلفاً كانت مسلمات النظام ونظرياته متآلفة.
2. **الاستقلال (Independence):** أي أن مسلمات النظام الرياضي مستقلة عن بعضها، بحيث لا يمكن استنتاج إحدى المسلمات من مسلمات أخرى. إن المحاولات الفاشلة التي تمت لإثبات استقلالية المسلمة الخامسة لإقليدس عن مسلماته الأخرى كانت أهم قضية في تاريخ استقلال الأنظمة الرياضية مما أدى إلى اكتشاف الهندسات اللاإقليدية. وتتم عملية إثبات استقلالية جميع مسلمات نظام رياضي من خلال أخذ النفي لمسلمة ما فيه مع باقي مسلمات النظام، مكونين بذلك نظاماً جديداً ثم بعد ذلك نثبت تآلف هذا النظام الجديد. ومع أن خاصية الاستقلال ليست ضرورية، لكنه مرغوب فيها؛ لذا فإن استخدام أقل عدد ممكن من المسلمات في تكوين نظام رياضي يجعله أكثر إحكاماً.

3. **التصنيف (Categoricalness)**: أي أن النماذج المختلفة لنفس البنية الافتراضية متماثلة (Isomorphic)، بمعنى أنه يوجد اقتران تناظر (واحد لواحد وشامل) بين عناصر هذه النماذج، عندها فإن أي نتيجة صحيحة/ خاطئة في النموذج الأول تكون صحيحة/ خاطئة في النموذج الثاني أيضاً. وليس من الضروري أن تتحقق هذه الخاصية لمسلمات نظام ما، وقد لا يكون من المرغوب فيه تصنيف مسلماته.
4. **الاكتمال (Completeness)**: وتعني أن مجموعة المسلمات كافية للبرهان على أي قضية أو نظرية في البنية الرياضية، أي أن النظام الرياضي يكون مكتملاً، إذا استحال إضافة مسلمة أخرى له دون زيادة تعابيره الأولية بحيث يبقى النظام متآلفاً ومستقلاً. وتعتبر هذه الخاصية من أكثر الخصائص غموضاً؛ إذ أنه من الصعوبة تحديد عدد المسلمات التي نحتاج عند مرحلة بناء مسلمات النظام الرياضي. وحيث أن كل نظام تصنيفي يكون مكتملاً فإننا نلجأ إلى خاصية التصنيف لإثبات اكتمال النظام الرياضي.



## 1 – 6 أسئلة للمناقشة:

1. حدِد أبرز إنجازات بعض الحضارات في الهندسة.
2. اذكر ثلاثة من الرياضيين المسلمين الذي ناقشوا مسلمة التوازي لإقليدس.
3. وضِح مكونات البنية الرياضية، مستشهداً بأمثلة من الهندسة.
4. ما هي النواقص أو المآخذ على الهندسة الإقليدية؟ بين كيف تم التوصل إلى هندسات غير إقليدية.
5. وضِح خصائص البنية الرياضية، مبيناً الضروري والمرغوب منها.
6. اعتماداً على النظام الآتي، أثبت أن هذا النظام يحقق خاصيتي التآلف والاستقلال.

مفاهيمه الأولية: النقطة، الخط المستقيم، أما مسلماته فهي:

- تتكون مجموعة النقط من ثلاث نقط فقط.
- تقع أي نقطتين مختلفتين على خط مستقيم واحد فقط.
- لا توجد جميع النقط على خط مستقيم واحد.
- يشترك كل خطين مستقيمين مختلفين في نقطة واحدة على الأقل.

7. اذكر ثلاثة مؤلفات إسلامية تركَزت حول أفكار هندسية وأسماء مؤلفيها.

# الفصل الثاني

# مفاهيم أساسية في الهندسة

---

2-1 مفاهيم أوليّة:

- النقطة
- الخط المستقيم
- الشعاع
- المستوى

2-2 أنواع المستقيمات

2-3 أنواع المستويات

2-4 علاقة المستقيم مع المستوى

2-5 مفاهيم معرّفة:

■ أولاً: الزوايا وقياسها

- أنواع الزوايا
- المستقيمات المتعامدة
- مستقيم يعامد مستوى
- مستوى يعامد مستوى
- العلاقات بين الزوايا

■ ثانياً: المضلّعات

- المضلّعات الثلاثية
- المضلّعات الرباعية
- نظرية (مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث)
- المضلّع المنتظم

2-6 أسئلة للمناقشة

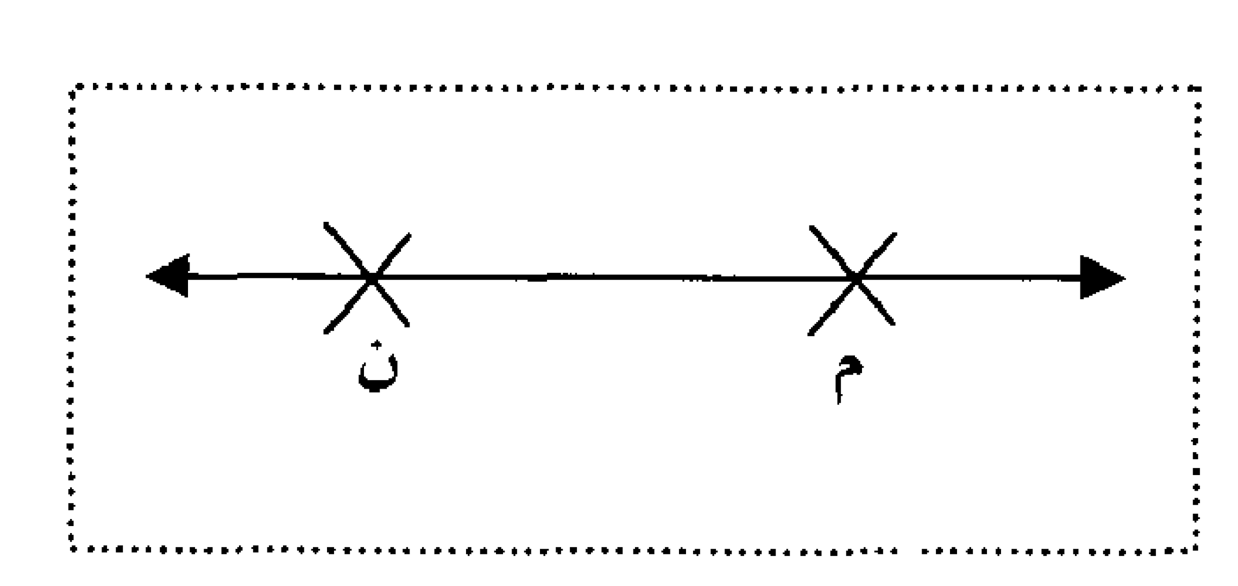
# الفصل الثاني
# مفاهيم أساسية في الهندسة

## 2 – 1 مفاهيم أوليّة:

تعامل الرياضيون في البنية الرياضية للهندسة مع مفاهيم أوليّة (غير معرّفة) وإنما يمكن تقديم وصف لها، وقد تركّزت في:

1. النقطة (Point): تمثل النقطة الوحدة الأساسية في الهندسة، وتظهر من خلال تمثيلها برأس القلم على سطح الورقة ويمكن استخدام أحد الحروف أ، ب، جـ،... للدلالة عليها. ومن أمثلتها: نجم في السماء، ذرّة ملح أو تراب، قطرة من ماء المطر.

2. الخطّ المستقيم (Straight Line):



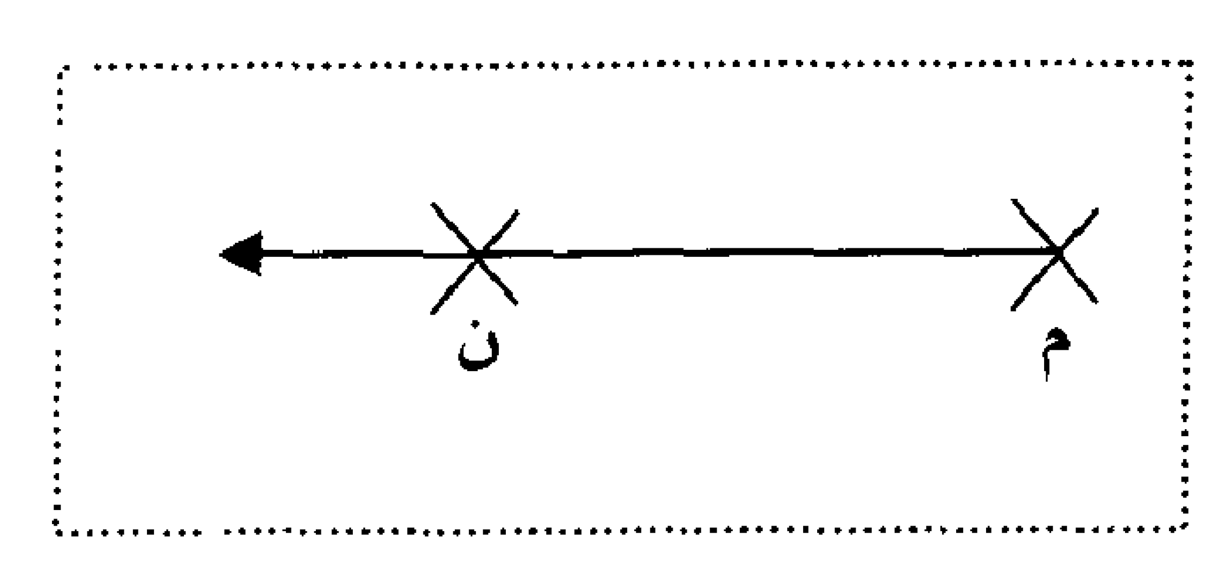

ويمثّل مجموعة غير منتهية من النقاط الواقعة على استقامة واحدة، ويمتدّ من طرفيه إلى مالا نهاية. ومن أمثلته: امتداد حافّة المسطرة، امتداد حافة رصيف الشارع، امتداد حافة الباب.

يتحدّد الخط المستقيم بنقطتين، كما في الشكل المجاور بحيث تكون النقطتان م، ن من نقاطه، ويعبّر عنه بالرموز

$\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ أو $\overleftrightarrow{\text{ن م}}$ ويقرأ الخط المستقيم م ن، أو الخط المستقيم ن م.

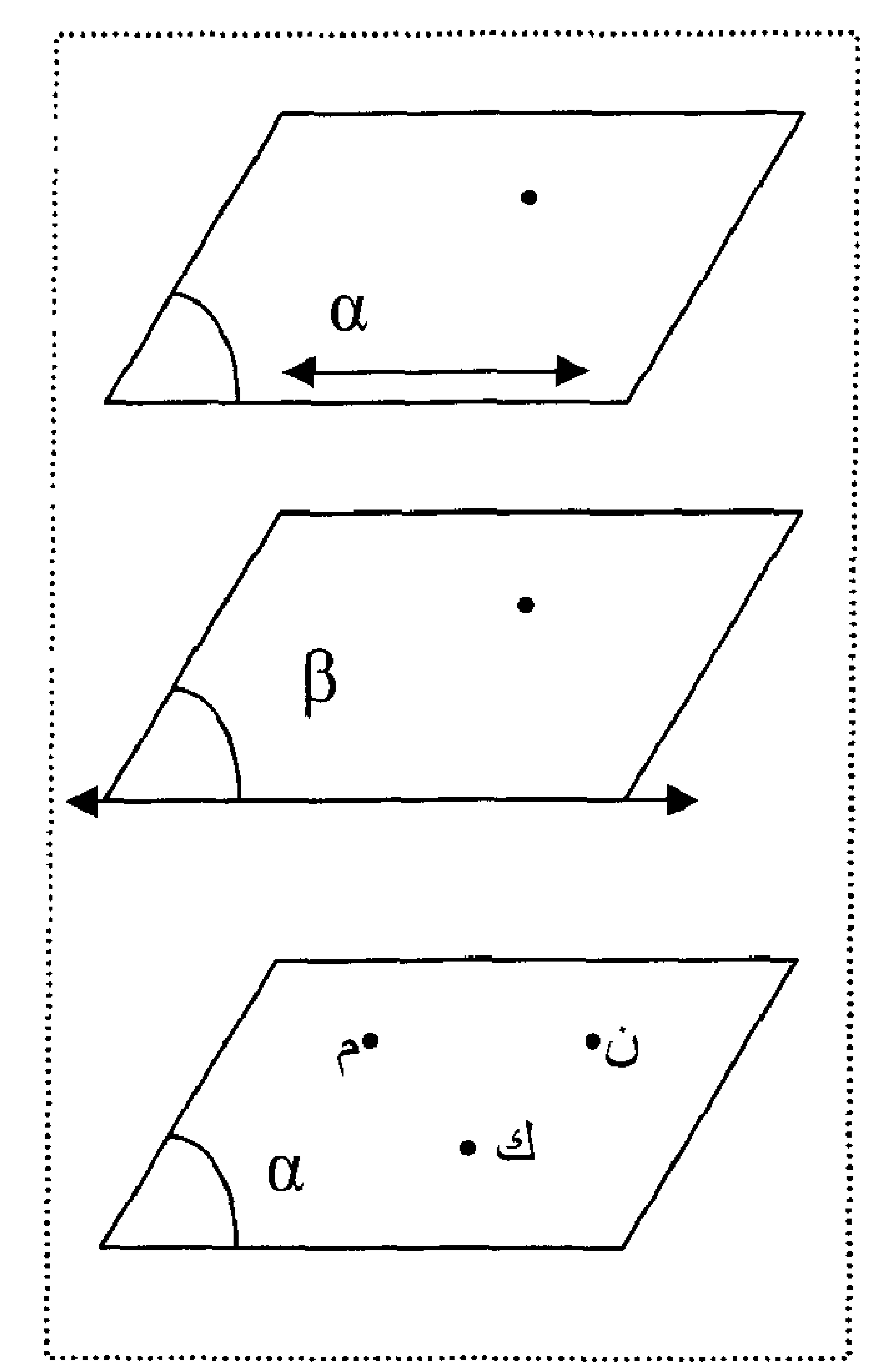
لاحظ أن $\overleftrightarrow{\text{م ن}} = \overleftrightarrow{\text{ن م}}$

3. **الشعاع (Ray):** يعتبر الشعاع مجموعة جزئية من الخط المستقيم، تحتوي على نقطة وجميع النقاط التي تقع على الخط من جهة واحدة من هذه النقطة، كما في الشكل المجاور، ويعبّر عنه بالرموز م ن ويقرأ الشعاع م ن.




لاحظ أن م ن ≠ ن م ، ومن أمثلته: شعاع من أشعة الشمس أو الضوء، سهم الرماة.

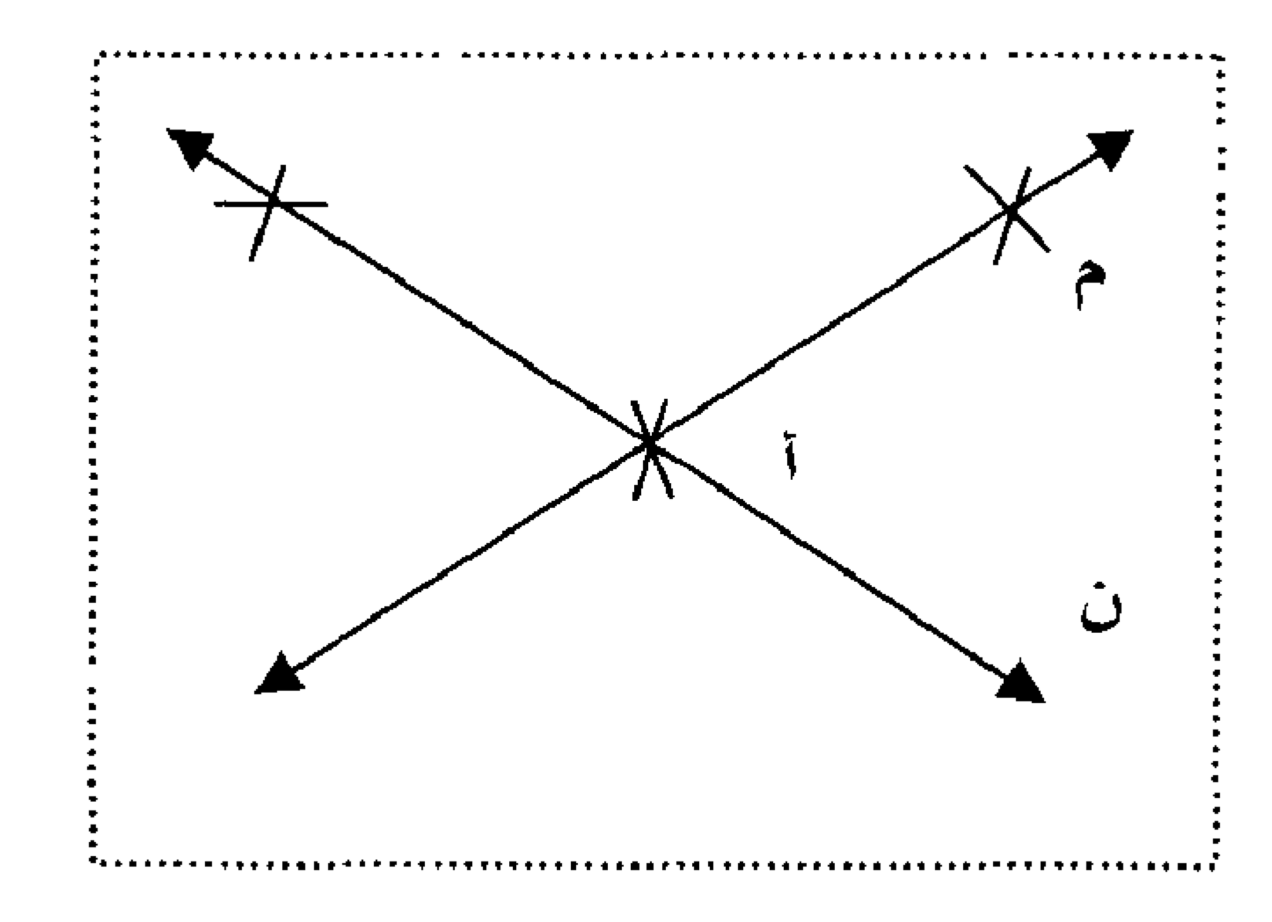
4. **القطعة المستقيمة (Straightsegment):**
تمثّل القطعة المستقيمة مجموعة جزئية من المستقيم م ن ، بحيث تحوي النقطتين م، ن وجميع النقاط الواقعة بينهما، كما في الشكل المجاور ويعبّر عنها بالرموز م ن أو ن م وتقرأ القطعة المستقيمة م ن أو ن م، لاحظ أن: م ن = ن م ومن أمثلتها: حافة الشباك، حافة كتاب.




5. **المستوى (Plane):** يمثّل جزءاً من الفراغ يتكوّن من بُعدين فقط هما الطول والعرض، ويتحدد بنقطة ومستقيم أو بنقطة ومستقيم ينتمي إلى المستوى أو بثلاث نقط لا تقع على استقامة واحدة كما في الشكل المجاور، ويعبّر عنها بالمستوى α أو المستوى م ك ن ومن أمثلتها: امتداد سطح الغرفة أو سطح السبّورة أو سطح الورقة.

## 2 – 2 أنواع المستقيمات:

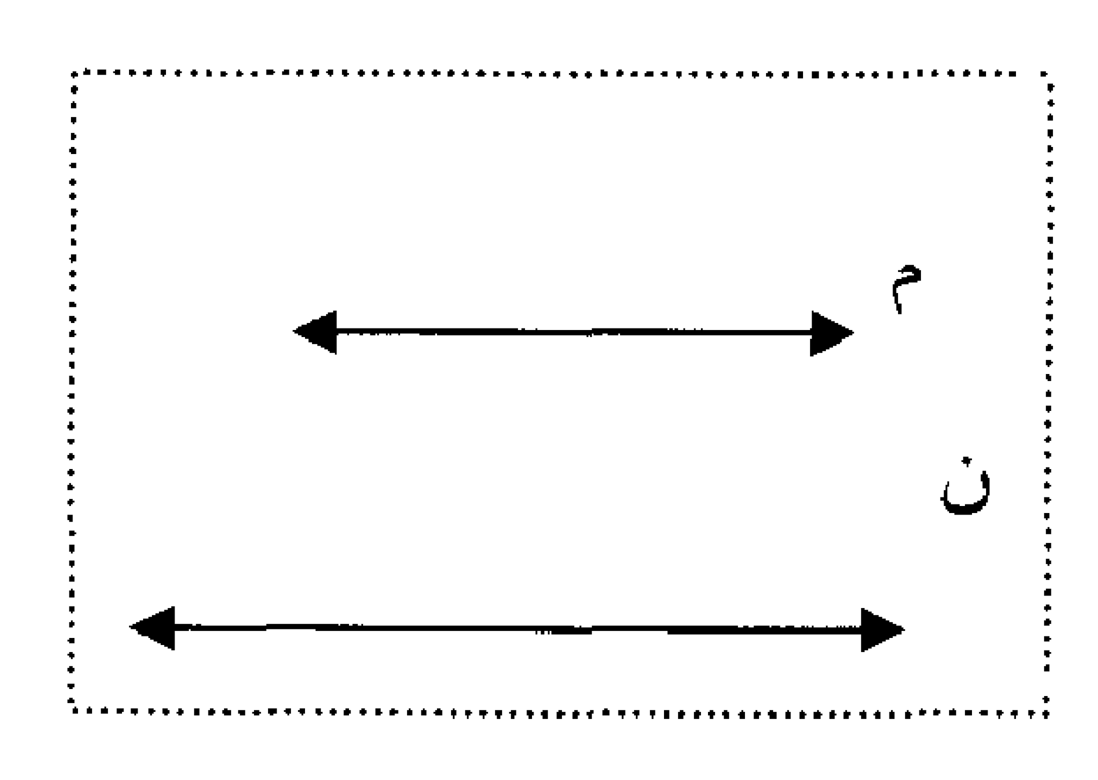
### 1. المستقيمات المتقاطعة:




يتقاطع مستقيمان إذا وفقط إذا اشتركا في نقطة واحدة كما في الشكل المجاور، ونقول:

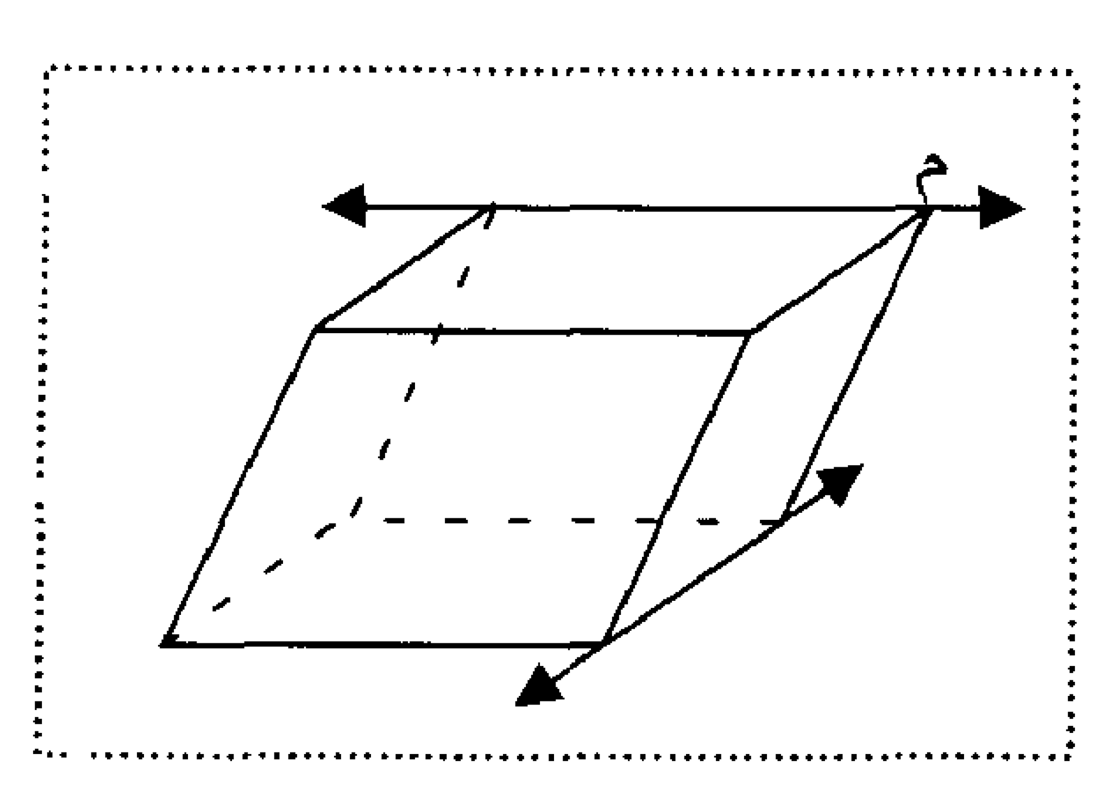
$$\overleftrightarrow{م} \cap \overleftrightarrow{ن} = \{أ\}$$

### 2. المستقيمات المتوازية:




يتوازى مستقيمان إذا وقعا في مستوى واحد، ولم يكن بينهما نقاط مشتركة، كما في الشكل المجاور، ونعبّر عنها المستقيم $\overleftrightarrow{م}$ يوازي المستقيم $\overleftrightarrow{ن}$ وبالرموز: $\overleftrightarrow{م}$ // $\overleftrightarrow{ن}$

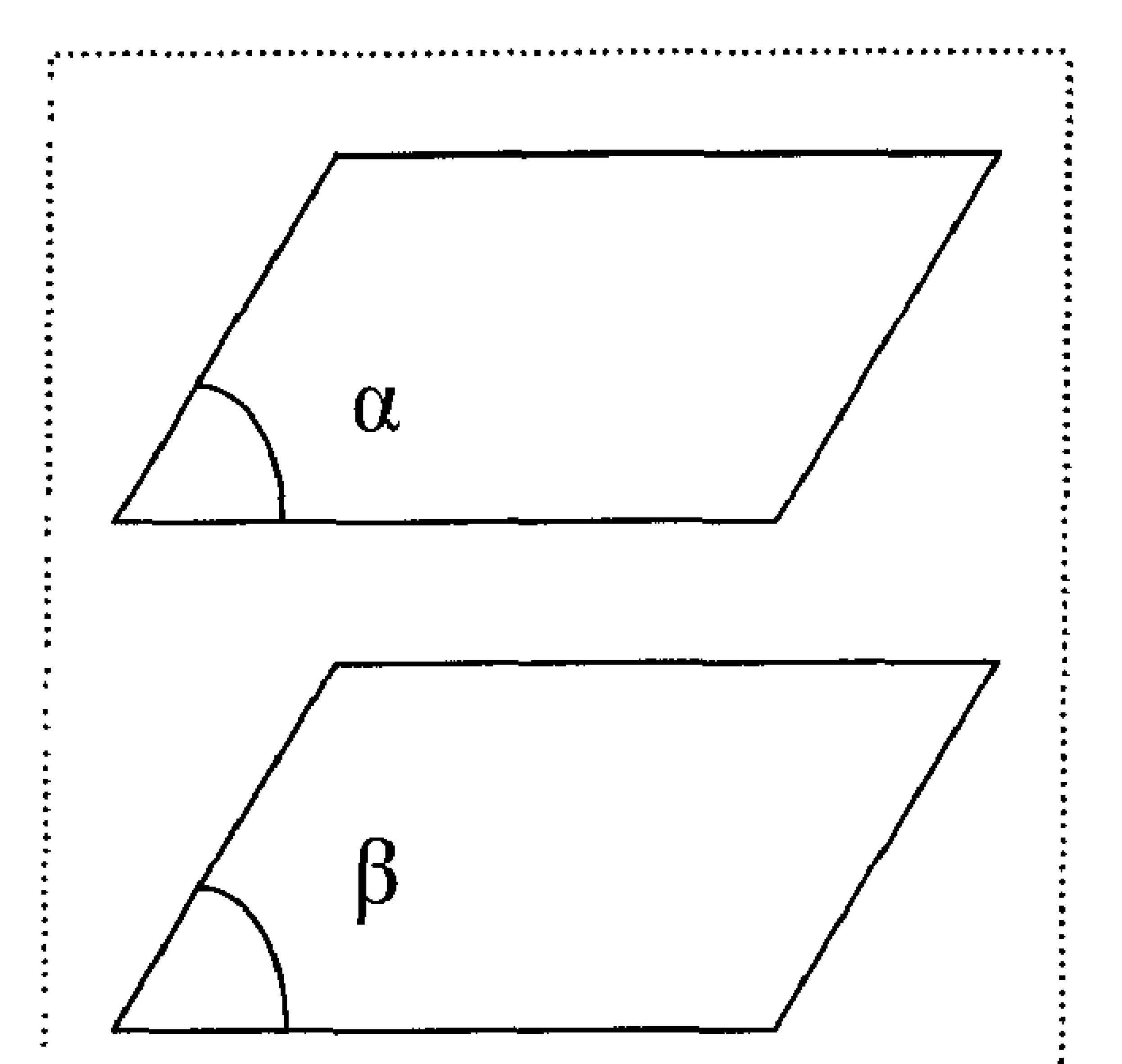
### 3. المستقيمات المتخالفة:




يتخالف مستقيمان إذا لم يحويهما مستوى واحد، ولم يكن بينهما أي نقاط مشتركة كما في الشكل المجاور، ونقول:

$\overleftrightarrow{م}$ يخالف $\overleftrightarrow{ن}$

## 2-3 أنواع المستويات:



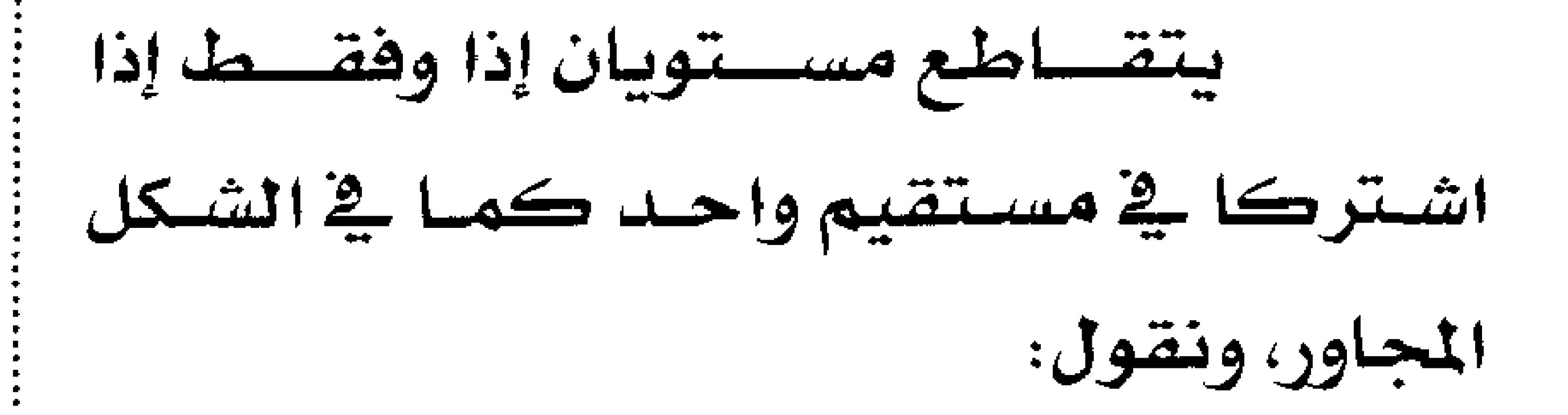

1. المستويات المتوازية:

يتوازى مستويان إذا لم يكن بينهما أي خطوط مشتركة كما في الشكل المجاور، ونقول:

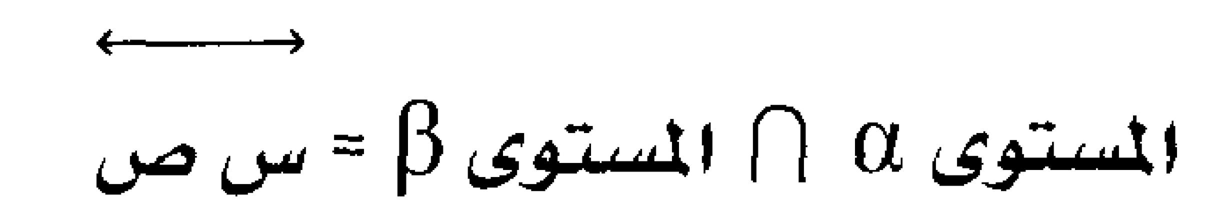
المستوى $\alpha$ // المستوى $\beta$



2. المستويات المتقاطعة:

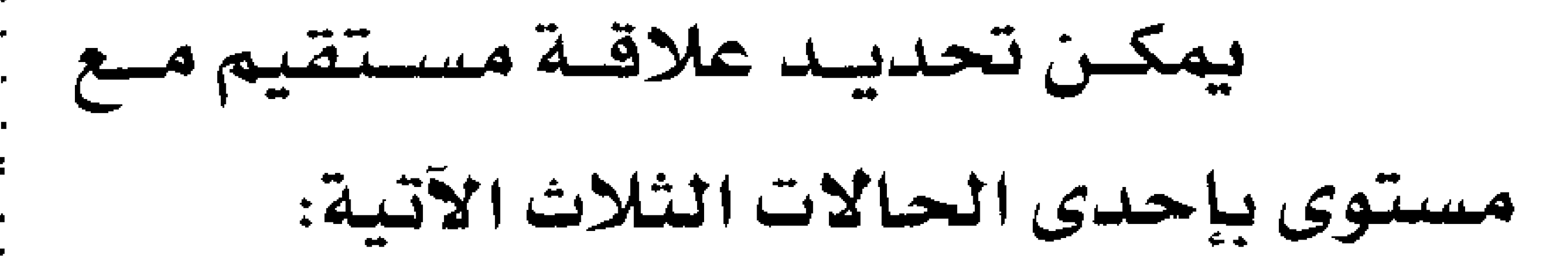


يتقاطع مستويان إذا وفقط إذا اشتركا في مستقيم واحد كما في الشكل المجاور، ونقول:

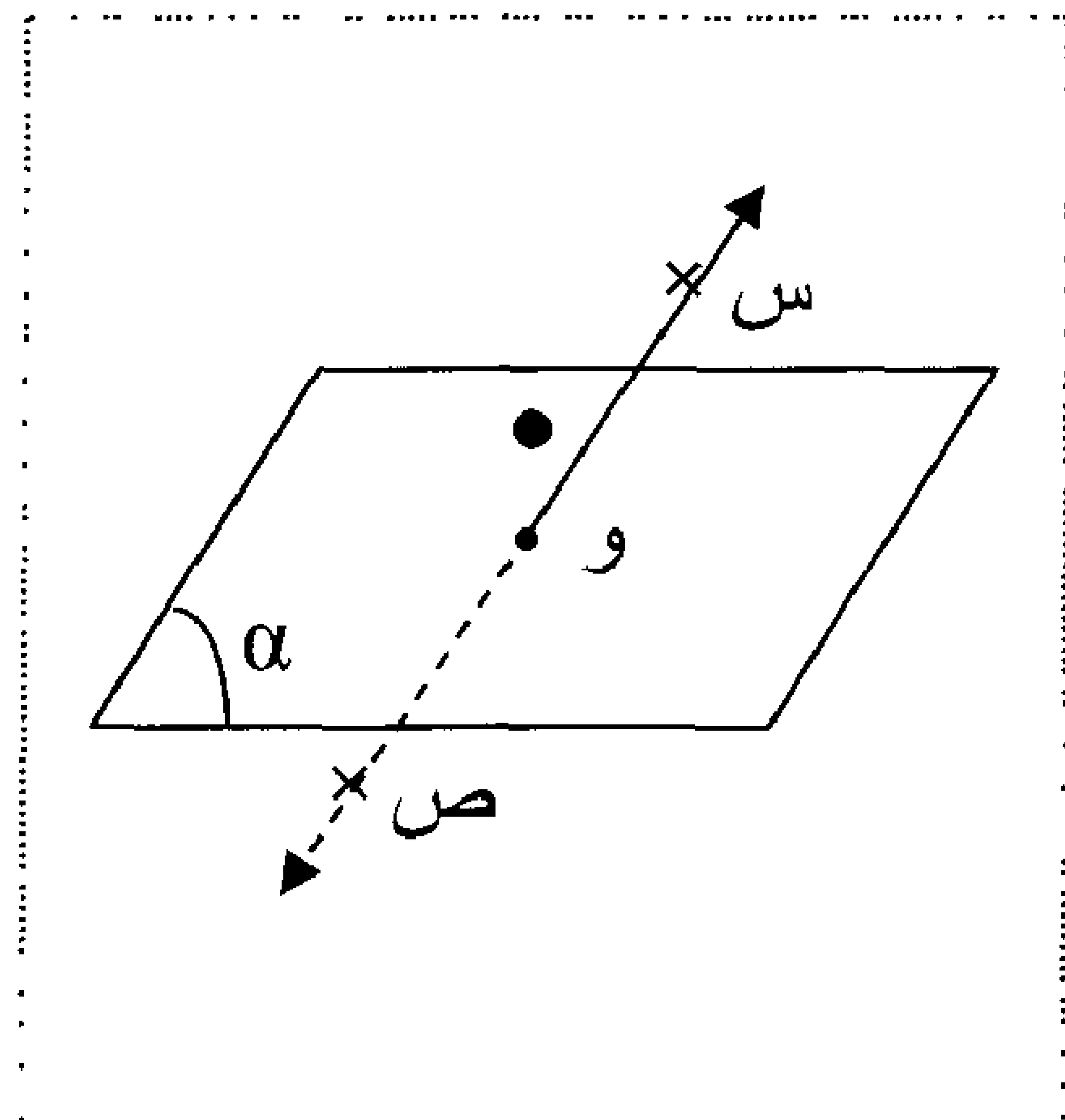


المستوى $\alpha$ $\cap$ المستوى $\beta$ = $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$

## 2- 4 علاقة المستقيم مع المستوى:



يمكن تحديد علاقة مستقيم مع مستوى بإحدى الحالات الثلاث الآتية:

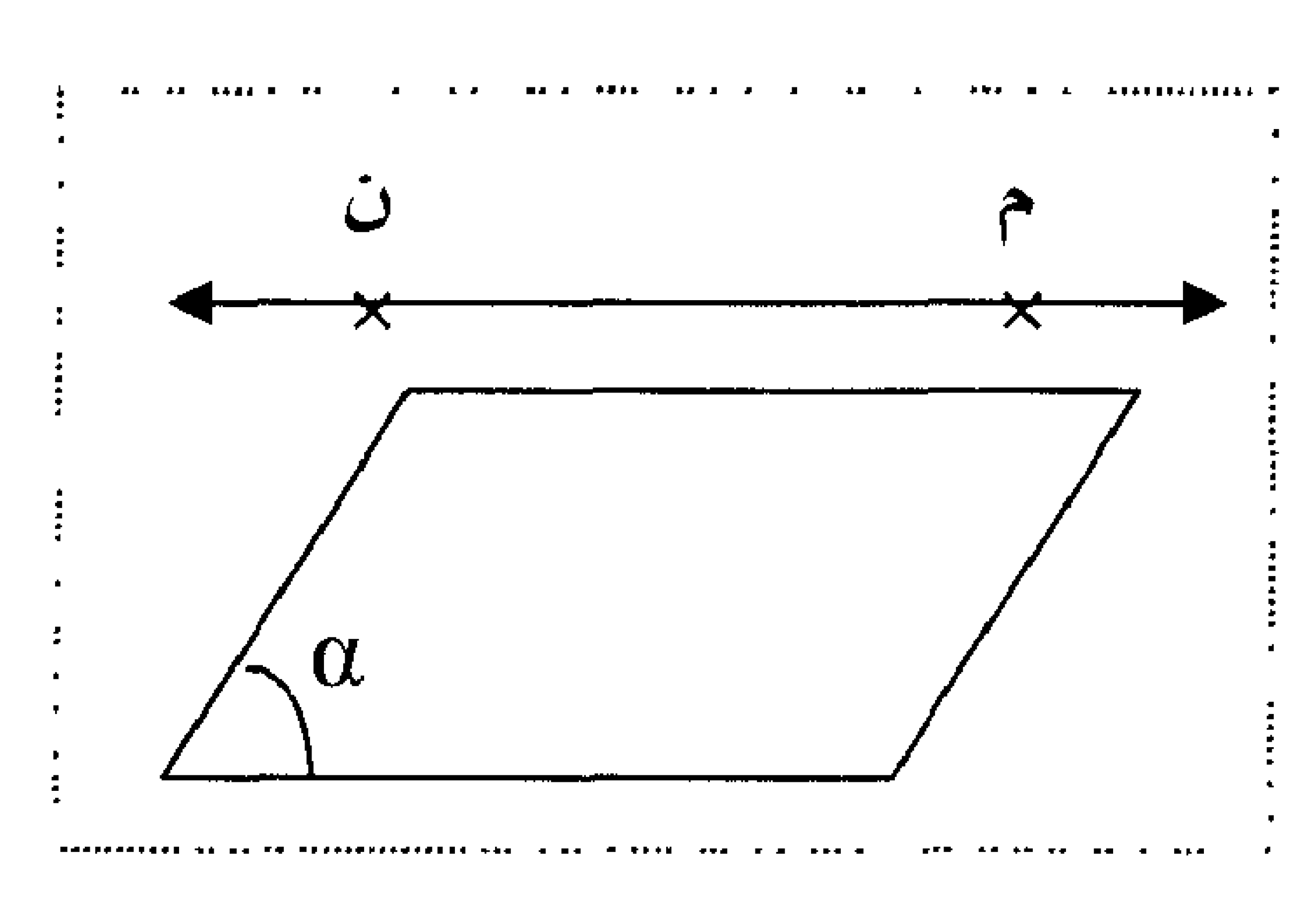



1. يقطعه:

يتقاطع مستقيم مع مستوى إذا وفقط إذا اشتركا في نقطة واحدة.

أي أن $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ $\cap$ المستوى $\alpha$ = {و}

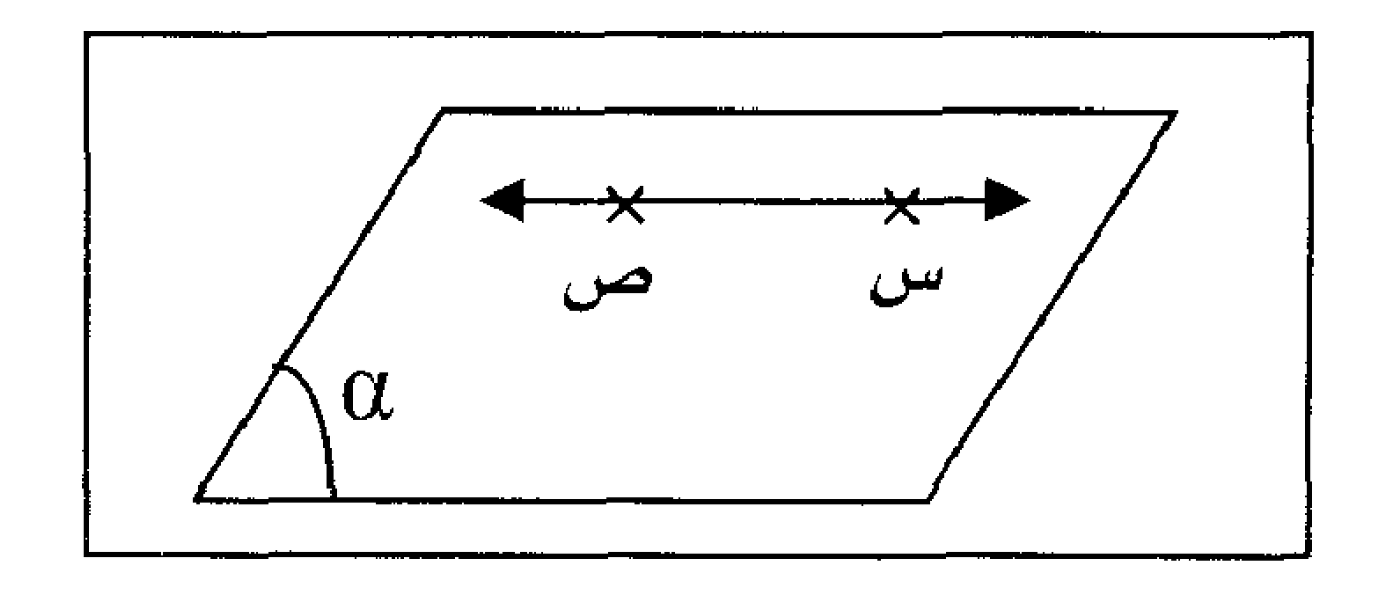
2. يوازيه:




يتوازى مستقيم مع مستوى إذا لم تكن أي من نقاطه تقع في المستوى. أي أن:

$\overleftrightarrow{\text{م ن}} // \alpha$

3. يقع عليه:



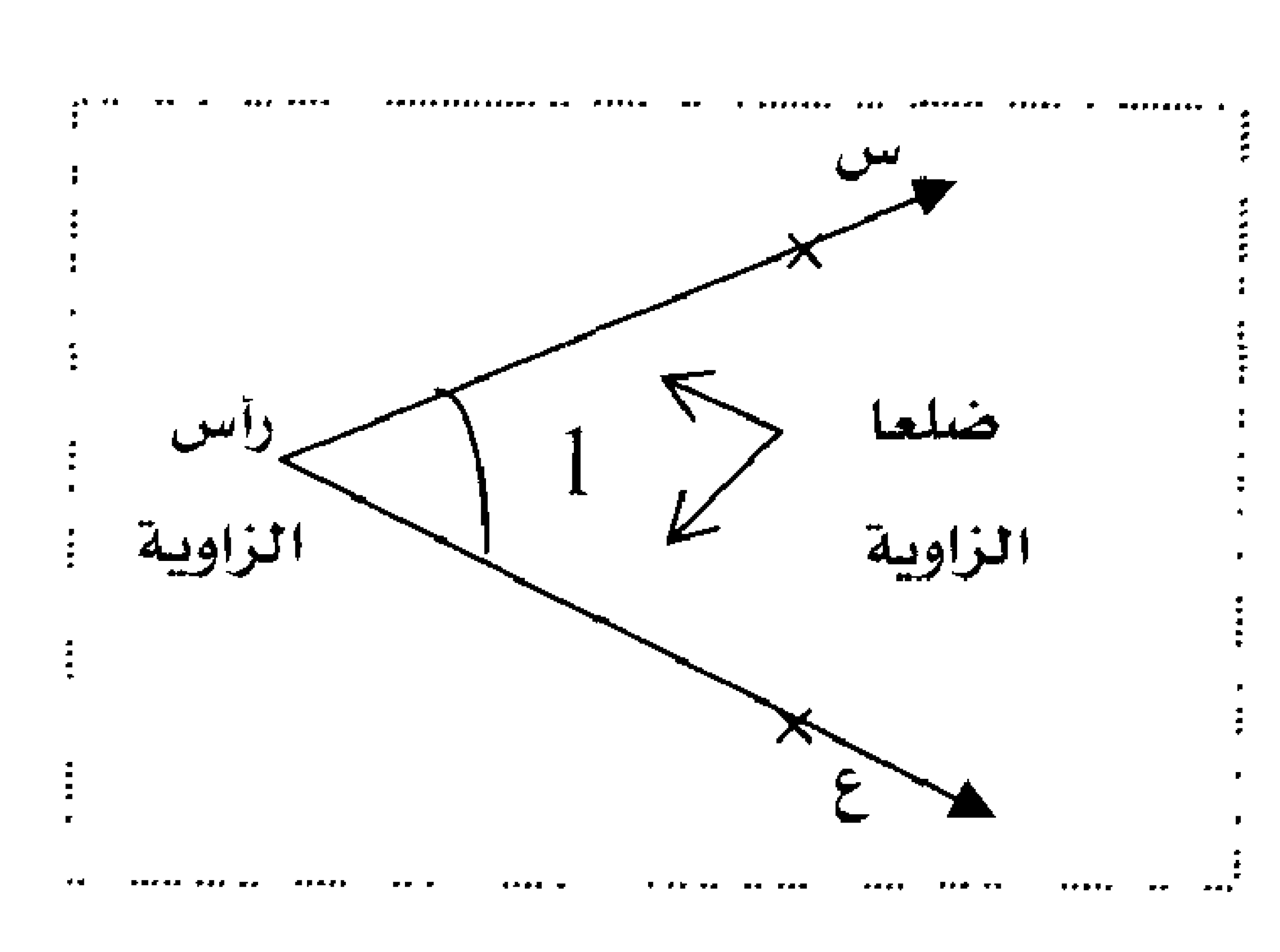

يقع مستقيم في مستوى إذا وقعت جميع نقاط المستقيم في المستوى.

أي أن $\overleftrightarrow{\text{س ص}} \cap \alpha = \overleftrightarrow{\text{س ص}}$

## 2-5 مفاهيم معرّفة (Defined Terms)

ذكرنا في فصل سابق أن أحد مكوّنات البنية الرياضية هي المفاهيم المعرّفة، وسنتناول في هذا الفصل:

**أولاً: الزاوية وقياسها**



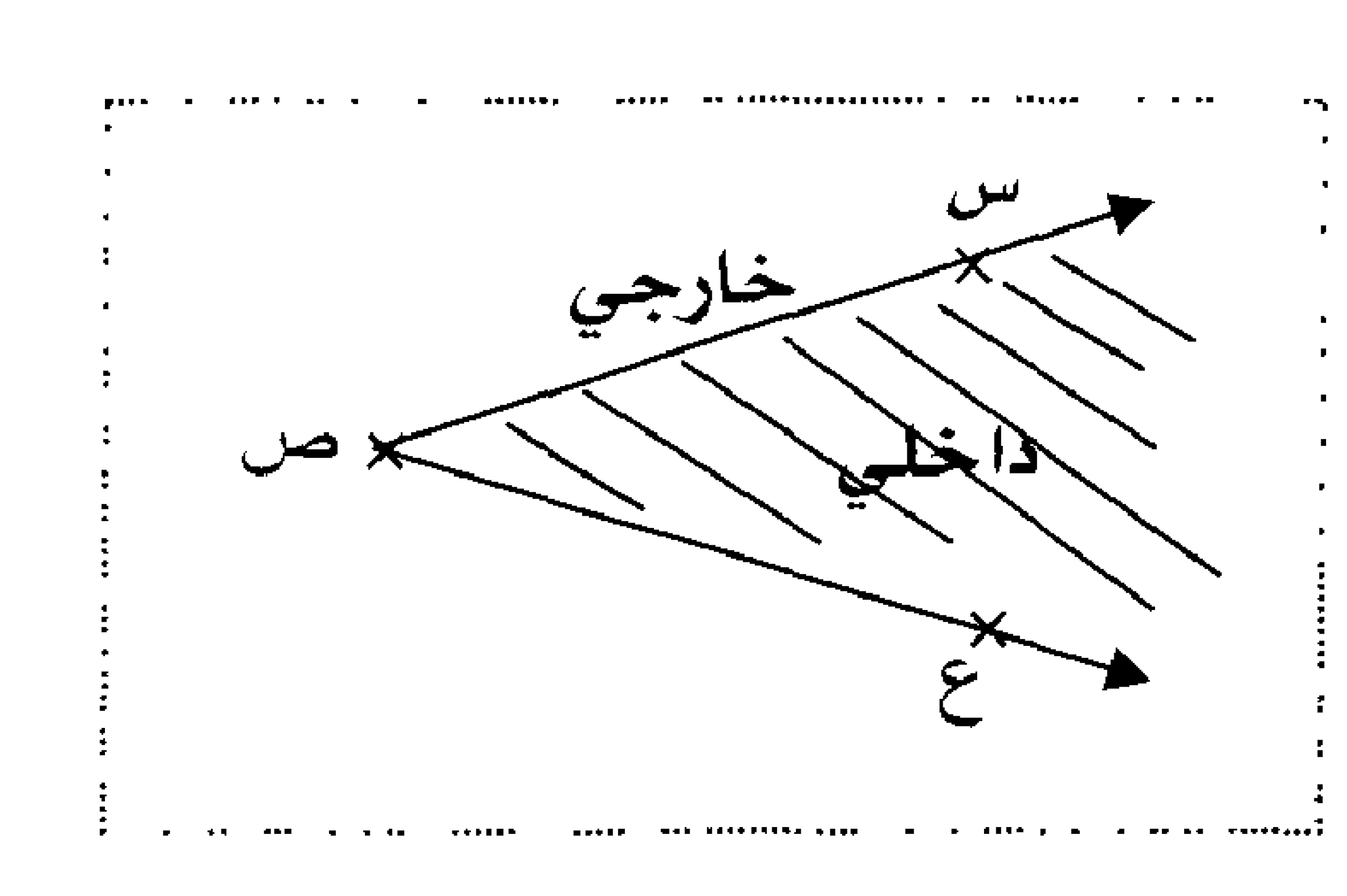

تعرّف الزاوية بأنها المنطقة المحصورة بين شعاعين ينطلقان من نقطة واحدة، يسمى كل شعاع منهما "ضلع الزاوية"، وتسمّى هذه النقطة "رأس الزاوية"، ويرمز للزاوية بالرمز ∢ أو ^.

تسمّى الزاوية بأشكال مختلفة:

∢ س ص ع

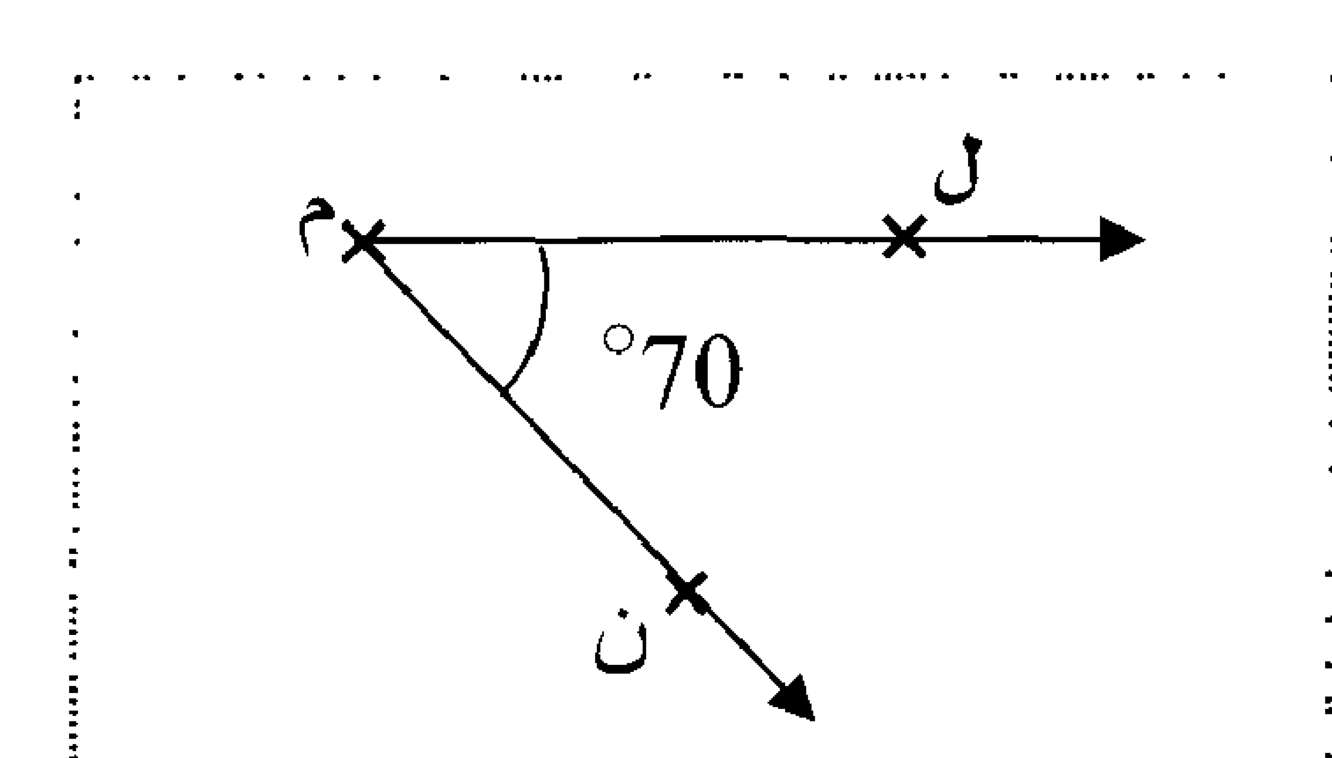
أو $\widehat{\text{ص}}$

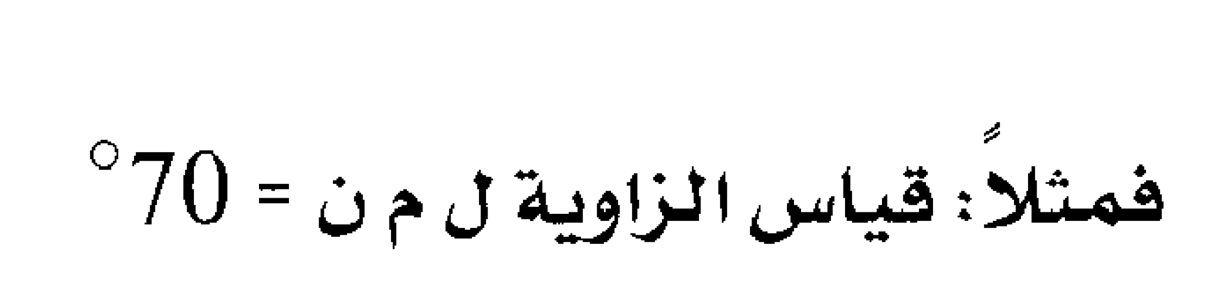
أو ∢ 1




**لاحظ أن أي زاوية تقسم المستوى إلى:**

- قسمين: داخلي وخارجي
- تقاس الزاوية بمقدار انفراج ضلعيها، ووحدة قياسها الدرجة (°) بواسطة أداة خاصّة تسمّى المنقلة.



فمثلاً: قياس الزاوية ل م ن = 70°

وتكتب ق ل م ن = 70°

تتكوّن الدرجة الواحدة من 60 دقيقة أي أن:

$1° = 60'$

كما أن: $1' = 60''$ (60 ثانية) وهكذا.

وسنكتفي بالقراءة إلى الدرجات والدقائق والثواني.

فإذا كان قياس ∢ ل ن م مثلاً 39 درجة و 54 دقيقة و 18 ثانية

فتُكتب: ق ∢ ل ن م = ″18 ′54 °39

ويمكن إجراء العمليات الأربع الأساسية على قياسات الزاوية كما يلي:

مثال:

إذا كان ق ∢ ل = ″37 ′48 °42

ق ∢ م = ″29 ′34 °75

ق ∢ ن = ″42 ′29 °82

أوجد:

1. ق ∢ ل + ق ∢ م
2. ق ∢ ن – ق ∢ ل
3. مثلي ق ∢ م
4. نصف ق ∢ ن

**الحل:**

1. ق∢ل + ق∢م = $(75^\circ\ 34'\ 29'') + (42^\circ\ 48'\ 37'')$

$= (75+42)^\circ\ (34+48)'\ (29+37)''$

$= 117^\circ\ \ 82'\ \ 66''$

$= 117^\circ\ \ 82'\ \ (6+60)''$

$= 117^\circ\ \ (1+82)'\ \ 6''$

$= 117^\circ\ \ 83'\ \ 6''$

$= 117^\circ\ \ (23+60)'\ \ 6''$

$= (1+117)^\circ\ \ 23'\ \ 6''$

$= 118^\circ\ \ 23'\ \ 6''$

2. ق∢ن − ق∢ل = $(42^\circ\ 48'\ 37'') - (82^\circ\ 29'\ 42'')$

$= (42-82)^\circ\ \ (48-29)'\ \ (37-42)''$

$= (42-81)^\circ\ \ (48-(60+29))'\ \ 5''$

$= 39^\circ\ \ 41'\ \ 5''$

3. $2 \times$ ق ∢ م $= 2 \times$ (29″ 34′ 75°)

= 58″ 68′ 150°

= 58″ (60+8)′ 150°

= 58″ 8′ 151°

4. $\frac{1}{2}$ ق ∢ ن $= \frac{1}{2} \times$ (42″ 29′ 82°)

= 21″ 14.5′ 41°

أو = 51″ 14′ 41° (لاحظ أن نضيف دقيقة = 30″ يمكن إضافتها لـ 21″)

**أنواع الزوايا:**

| نوع الزاوية | تعريفها | شكل يمثّلها |
|---|---|---|
| الحادّة | زاوية قياسها أقلّ من 90° | |
| القائمة | زاوية قياسها 90° | 90° |
| المنفرجة | زاوية قياسها محصور بين 90° و180° | |
| المستقيمة | زاوية قياسها 180° | |

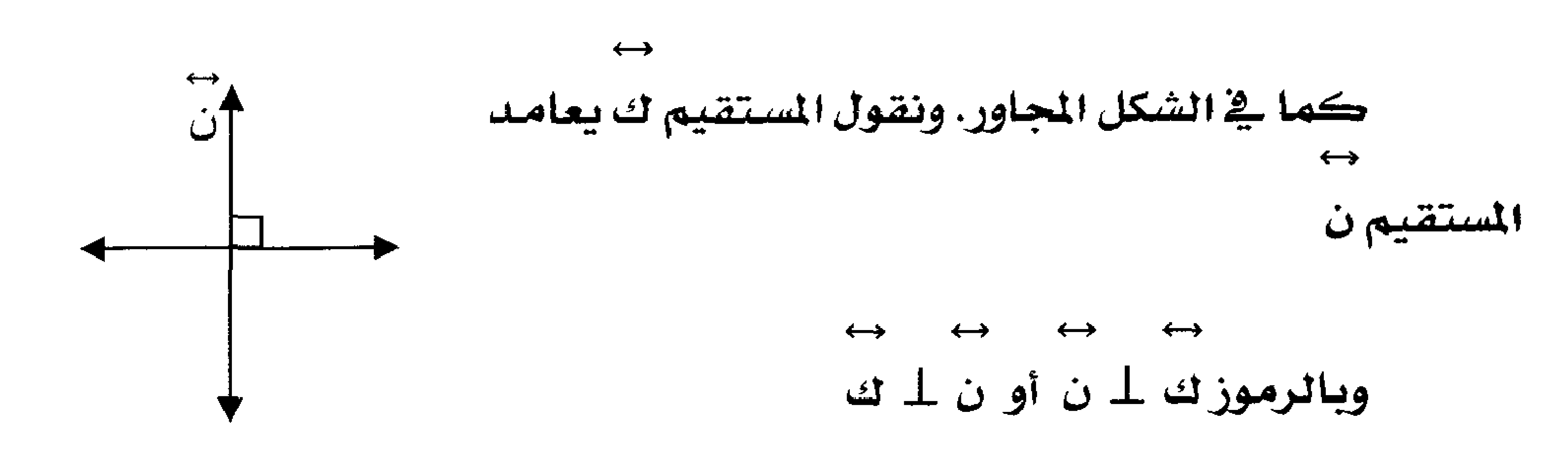
| نوع الزاوية | تعريفها | شكل يمثّلها |
| --- | --- | --- |
| المنعكسة | زاوية قياسها محصور بين 180° و 360° | |
| دورة كاملة | زاوية قياسها 360° بحيث يدور أحد أضلاعها دورة كاملة حول رأسها | |

- **المستقيمات المتعامدة:**

وهي حالة خاصّة من المستقيمات المتقاطعة، عندما تكون زاوية تقاطعها قائمة (أي قياسها 90°).

كما في الشكل المجاور. ونقول المستقيم ك يعامد المستقيم ن

وبالرموز ك ⊥ ن أو ن ⊥ ك

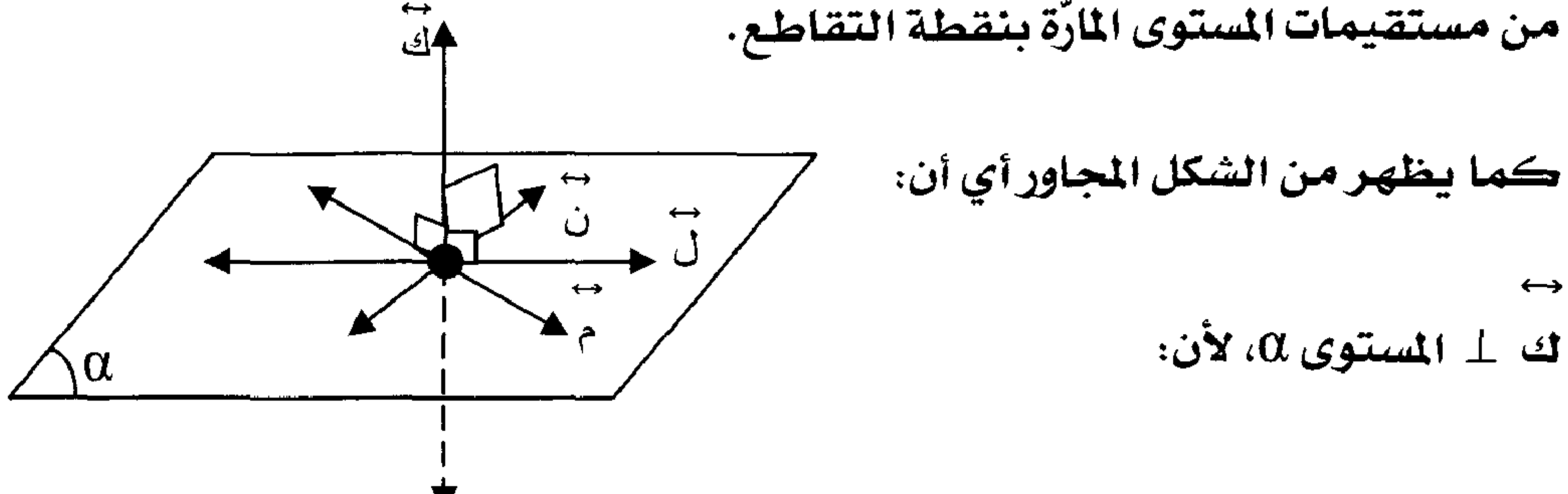



- **مستقيم يعامد مستوى:**

مستقيم يعامد مستوى إذا وفقط إذا تقاطعا وعامد المستقيم كل مستقيم من مستقيمات المستوى المارّة بنقطة التقاطع.

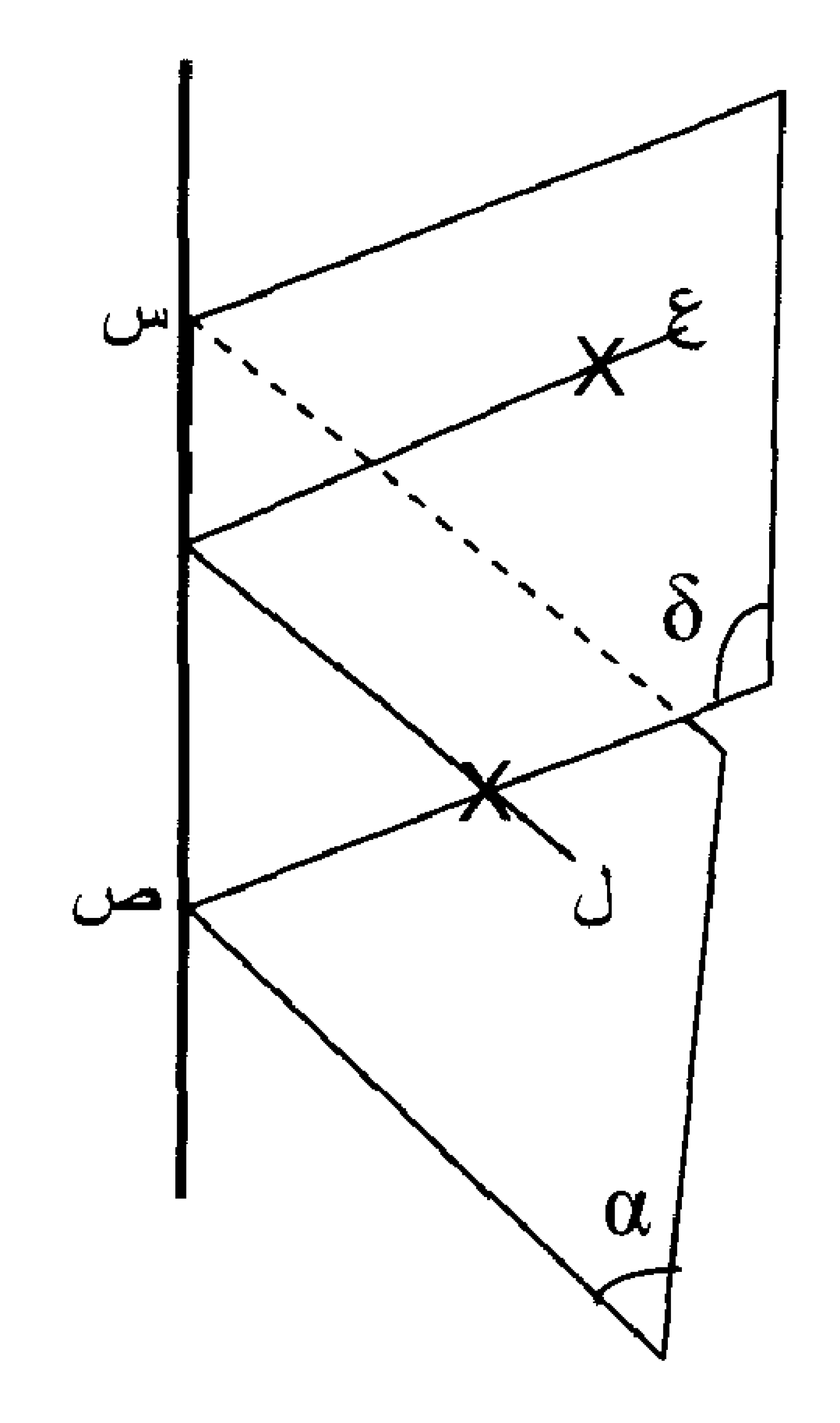
كما يظهر من الشكل المجاور أي أن:

ك ⊥ المستوى α، لأن:



↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔
ك ⊥ ل ، ك ⊥ م ، ك ⊥ ن

↔ ↔ ↔
ك ، م، ن هي مستقيمات تقع على المستوى $\alpha$




- **مستوى يعامد مستوى:**

مستوى يعامد مستوى إذا وفقط إذا عامد أحد مستقيمات المستوى الأول المستوى الثاني.

تسمّى الزاوية المحصورة بين أيّ مستويين متقاطعين بالزاوية الزاوجية.

في الشكل المجاور، تكتب الزاوية الزاوجية بين المستويين $\alpha$، $\delta$ على الصورة: ع – س ص – ل

حيث ع تقع في المستوى الأول، س ص رأس الزاوية، ل تقع على المستوى الثاني، لذا يكون المستوى الأول $\delta$ ⊥ المستوى الثاني $\alpha$ إذا وفقط إذا كان:

∢ ع – س ص – ل قائمة.

**العلاقات بين الزوايا:**

في الشكل المجاور، يتقاطع المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ج د}}$ وينتج عن ذلك أربع زوايا غير مستقيمة، هي $\hat{1}$ ، $\hat{2}$ ، $\hat{3}$ ، $\hat{4}$:

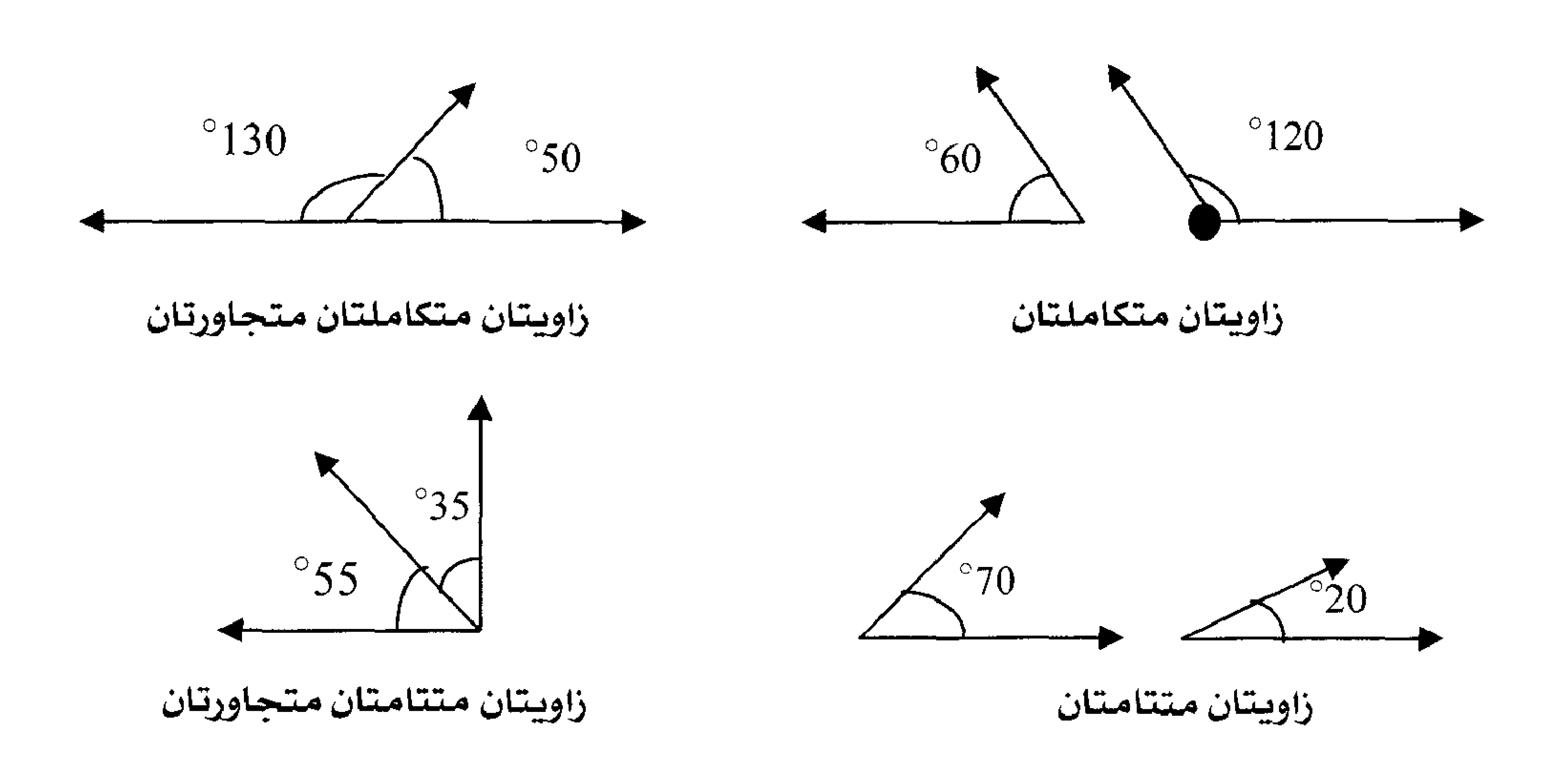
تسمّى الزاويتان $\hat{1}$ ، $\hat{3}$ زاويتان متقابلتان بالرأس وكذلك بالنسبة للزاويتين $\hat{2}$ ، $\hat{4}$ (وهي متساوية في القياس) أي متطابقة.

في حين تسمى الزاويتان $\hat{1}$ ، $\hat{4}$ زاويتان متجاورتان.

- الزاويتان المتكاملتان: هما زاويتان مجموعهما يساوي $180^\circ$ $\hat{1}$ تكمّل $\hat{4}$ لأن مجموعهما $180^\circ$ (يشكّل زاوية مستقيمة).

**الزاويتان المتتامّتان:**

**هما زاويتان مجموعهما يساوي $90^\circ$ (زاوية قائمة).**



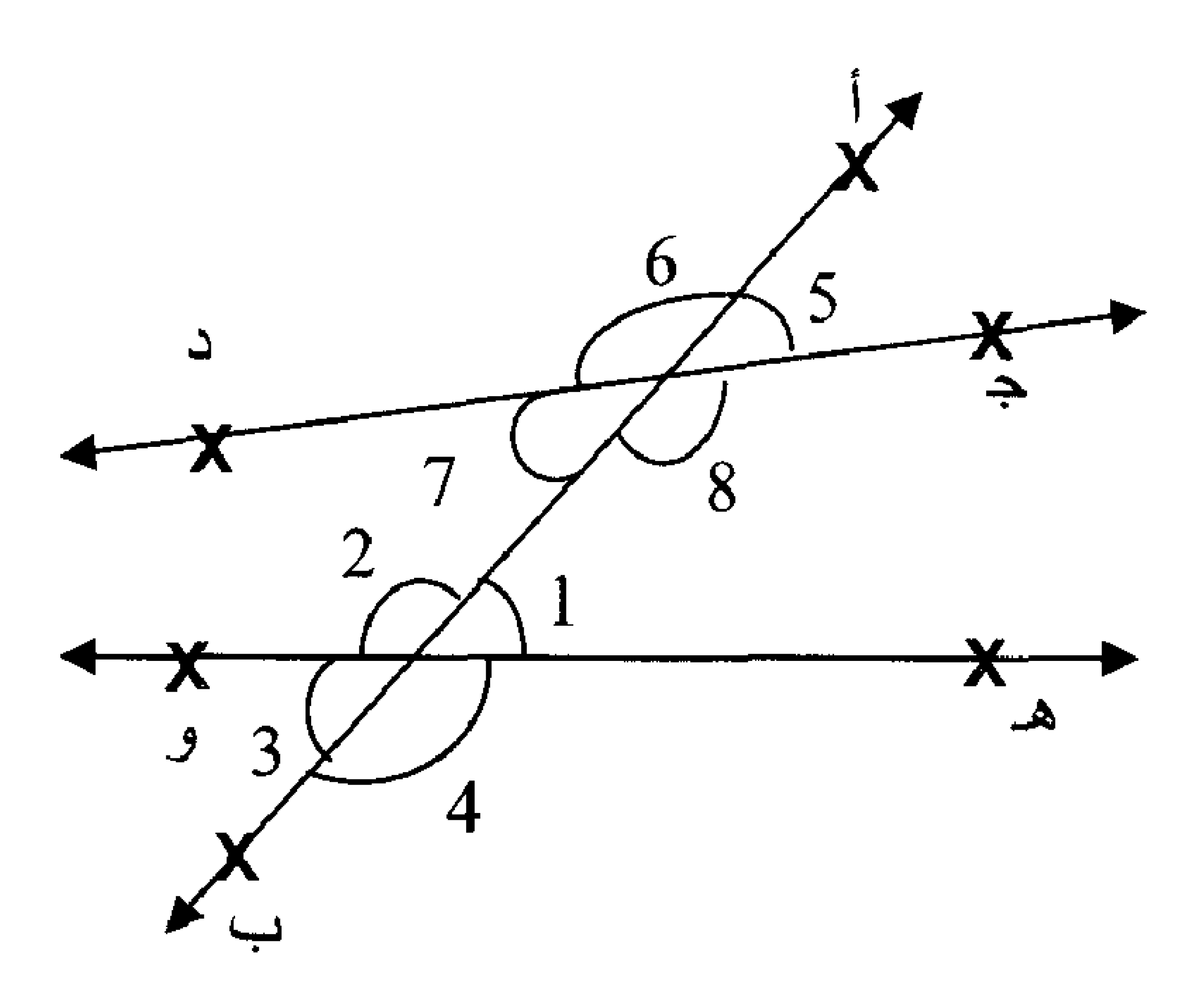

زاويتان متكاملتان متجاورتان

زاويتان متكاملتان

زاويتان متتامتان متجاورتان

زاويتان متتامتان

إذا قطع القاطع $\overleftrightarrow{أب}$ المستقيمين $\overleftrightarrow{جد}$، $\overleftrightarrow{هو}$ فإنّه ينتج ثمانية زوايا كما في الشكل المجاور.




تسمّى الزوايا $\hat{1}$ ، $\hat{2}$ ، $\hat{7}$ ، $\hat{8}$ زوايا داخلية

بينما تسمّى الزوايا $\hat{3}$ ، $\hat{4}$ ، $\hat{5}$ ، $\hat{6}$ زوايا خارجية

كما تسمّى الزاويتان $\hat{5}$ ، $\hat{1}$ زاويتين متناظرتين، كم زوجاً من الزوايا المتناظرة؟

وتسمّى الزاويتان $\hat{1}$ ، $\hat{7}$ زاويتين متبادلتين، كم زوجاً من الزوايا المتبادلة؟

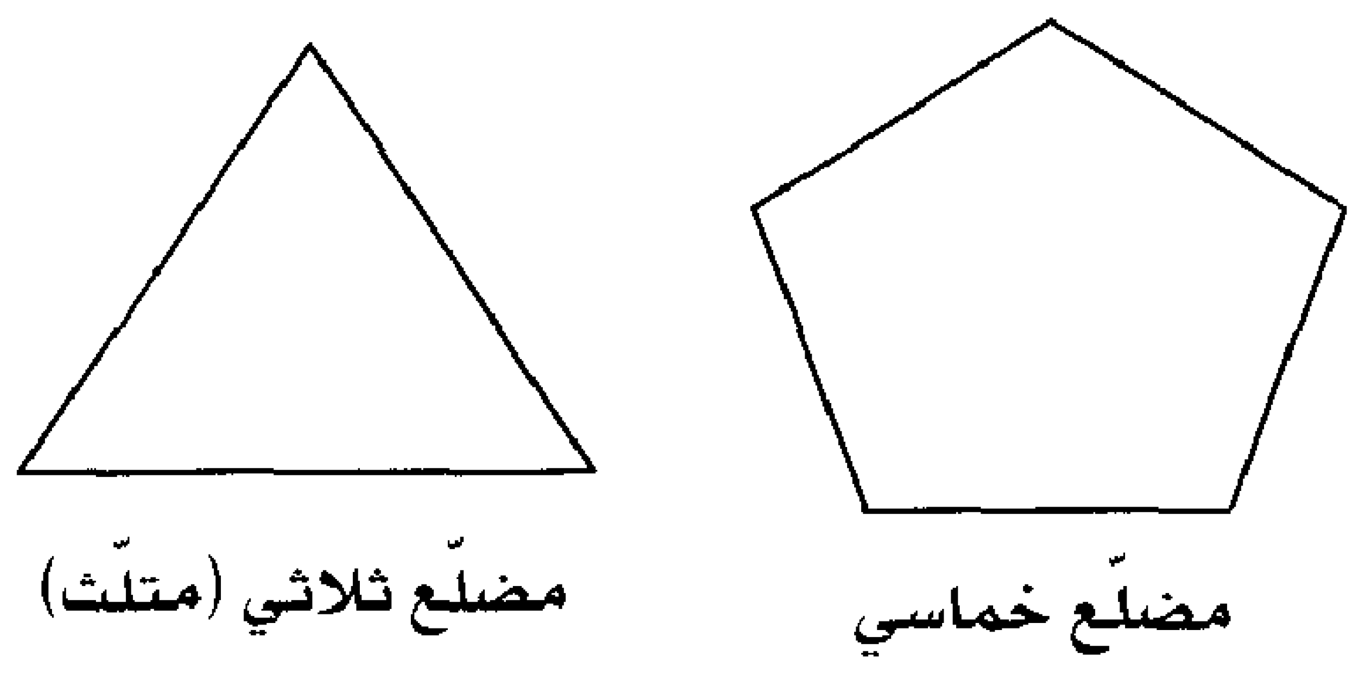
في حين تسمّى الزاويتان هي $\hat{1}$ ، $\hat{8}$ زاويتين متحالفتين، فكم زوجاً من الزوايا المتحالفة؟

**لاحظ أنه إذا توازى مستقيمان فإن:**

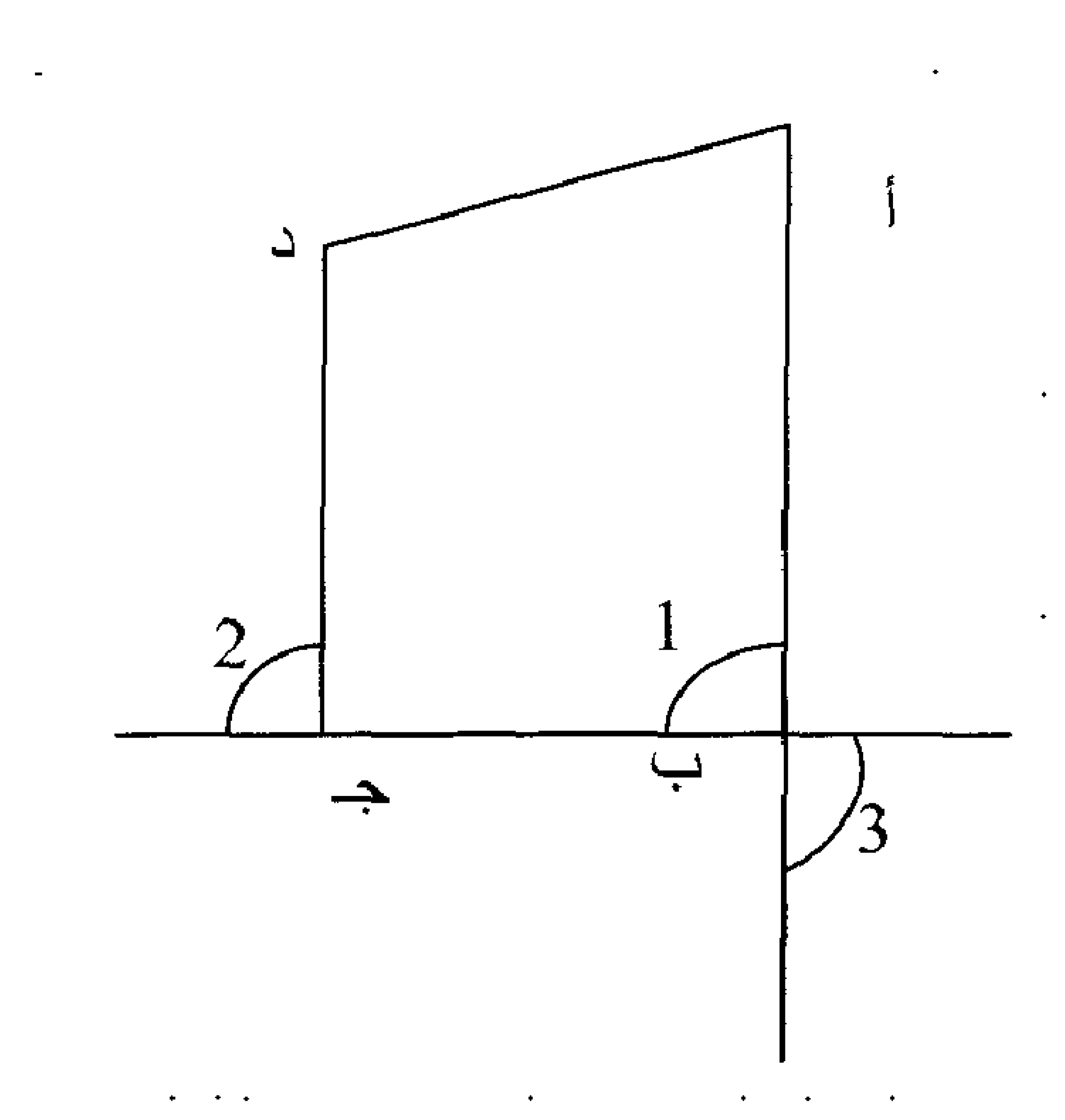
1. الزوايا المتناظرة متساوية.
2. الزوايا المتبادلة متساوية.
3. مجموع الزاويتين المتحالفتين يكون $180°$.

## ثانياً: المضلّعات

يكون الشكل الهندسي المستوي مضلّعاً، إذا تكوّن محيطه من قطع مستقيمة متصلّة ومغلقة، تسمّى كلّ قطعة مستقيمة ضلعاً.




يسمّى المضّلع بعدد أضلاعه، فإن كانت ثلاثة فيسمّى مثلّثاً أو ثلاثيّاً وهو أصغرها، وإن كانت خمسة فيُسمّى خماسياً وهكذا.




وللمضلّع زوايا داخلية وأخرى خارجية، فالزاوية الداخلية هي الزاوية التي تنحصر بين ضلعين من أضلاع المضلّع وتواجه واحد أو أكثر من أضلاعه الأخرى، في حين أن الزاوية الخارجية هي الزاوية التي تنحصر بين أحد أضلاع المضلّع وامتداد الضلع الذي يقطع الضلع الأول ويسمّى الشكل أ ب جـ د المجاور مضلّعاً رباعيّاً كما تسمّى ∢ 1 داخلية لكن تسمّى ∢ 3، ∢ 2 زوايا خارجية بالنسبة للمضلّع أ ب جـ د.

لاحظ أن لهذا المضلّع 4 زوايا داخلية في حين أنّ له 8 زوايا خارجية.

يكون عدد الزوايا الداخلية لمضلّع مساوٍ لعدد أضلاعه، بينما يكون عدد زواياه الخارجية مساوٍ لمثلي عدد أضلاعه.

فمثلاً عدد الزوايا الداخلية للمضلّع الخماسي 5 زوايا (مساوٍ لعدد أضلاعه) في حين أن عدد الزوايا الخارجية له = 2×5 = 10 زوايا. كما تُسمّى نقطة

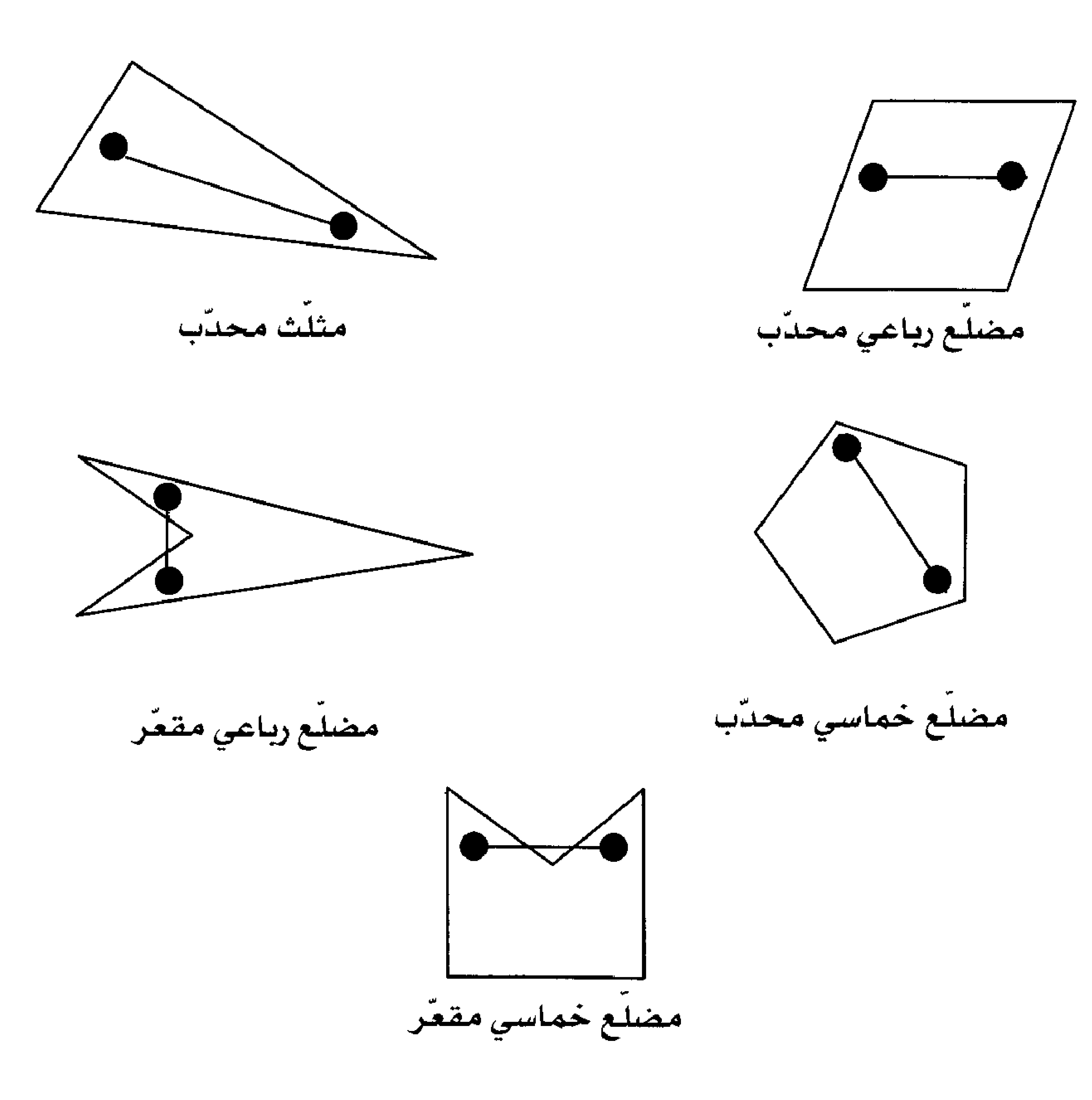
إلتقاء أي ضلعين فيه رأساً، ويكون عدد رؤوس أيّ مضلّع مساوٍ لعدد أضلاعه، فللمربع (المضلّع الرباعي) 4 رؤوس.

وتُسمّى القطعة المستقيمة الداخلية التي تصل بين أي رأسين غير متتالين فيه قطراً.

ويكون عدد أقطار المضلّع النوني (الذي عدد أضلاعه ن) = $\frac{ن(ن-3)}{2}$

فمثلاً عدد أقطار المضلّع الخماسي = $\frac{5(5-3)}{2} = \frac{5\times 2}{2} = 5$

وإمّا أن يكون المضلّع محدّباً إذا لم توجد أي قطعة مستقيمة داخلية تقطع محيطه وإلّا فهو مقعّراً.



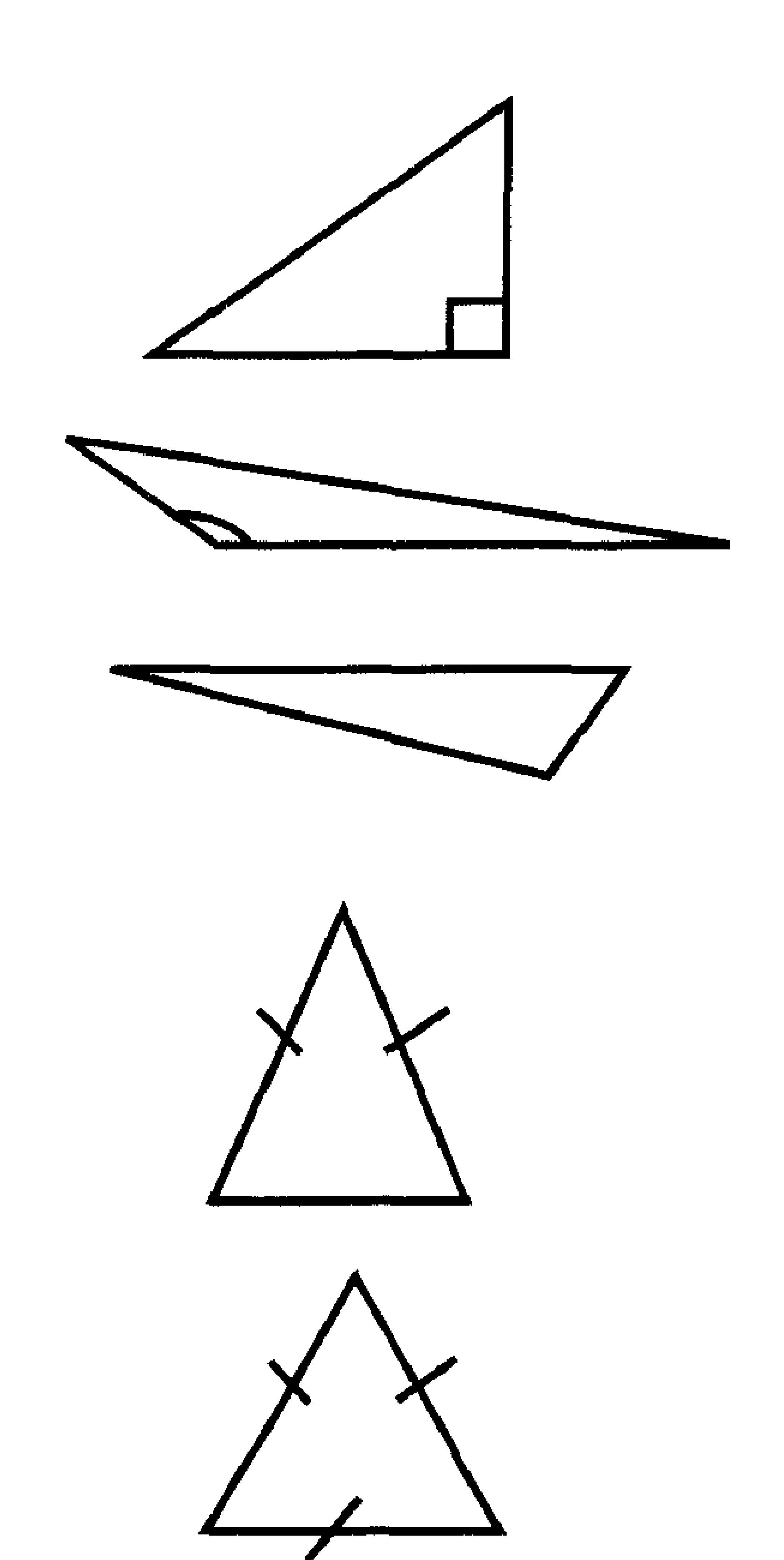
مضلّع رباعي محدّب — مثلّث محدّب

مضلّع خماسي محدّب — مضلّع رباعي مقعّر

مضلّع خماسي مقعّر

## أنواع المضلّعات الثلاثيّة (المثلّثات):

تقسم المثلّثات من حيث الزوايا إلى:



1. المثلّث القائم الزاوية: وهو مثلث إحدى زواياه قائمة.
2. المثلّث المنفرج الزاوية: وهو مثلّث إحدى زواياه منفرجة.
3. المثلّث الحاد الزوايا: وهو مثلّث جميع زواياه حادة.

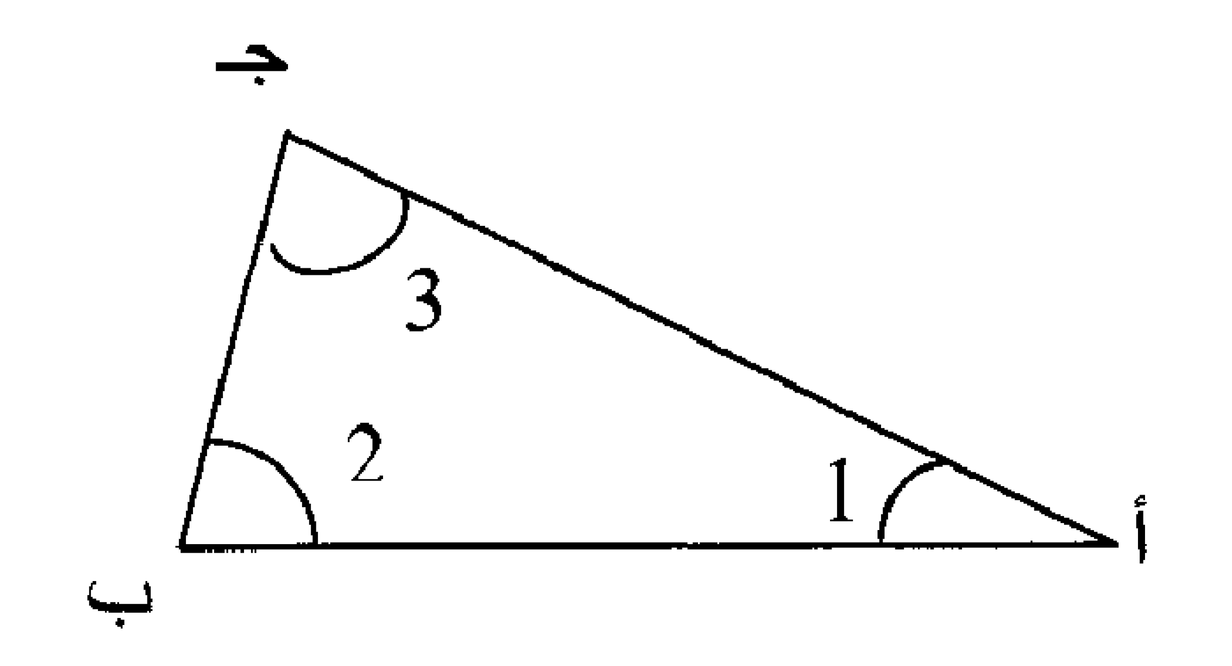
كما تقسم المثلّثات من حيث الأضلاع إلى:

1. المثلّث المتساوي الساقين: وهو مثلّث فيه ضلعين متساويين.
2. المثلّث المتساوي الأضلاع: وهو مثلّث جميع قياسات أطوال أضلاعه متساوية.
3. المثلّث المختلف الأضلاع: وهو مثلّث جميع قياسات أطوال أضلاعه مختلفة.

## أنواع المضلّعات الرباعيّة:

| | |
|---|---|
| متوازي الأضلاع: مضلّع رباعي فيه كلّ ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين في الطول. | |
| المستطيل: متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة. | |
| المعين: متوازي أضلاع تكون أضلاعه متساوية | |
| المربّع: معين إحدى زواياه قائمة أو مستطيل جميع أضلاعه متساوية. | |
| شبه المنحرف: مضلّع رباعي فيه ضلعين متوازيين فقط. | |
| شبه المنحرف متساوي الساقين: شبه منحرف زوايا إحدى قاعدتيه متساويتين أو أطوال ضلعيه غير المتوازيين متساويين. | |

**نظرية: مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية يساوي 180°**




**الحل:**

**المعطيات:** أ ب جـ مثلّث

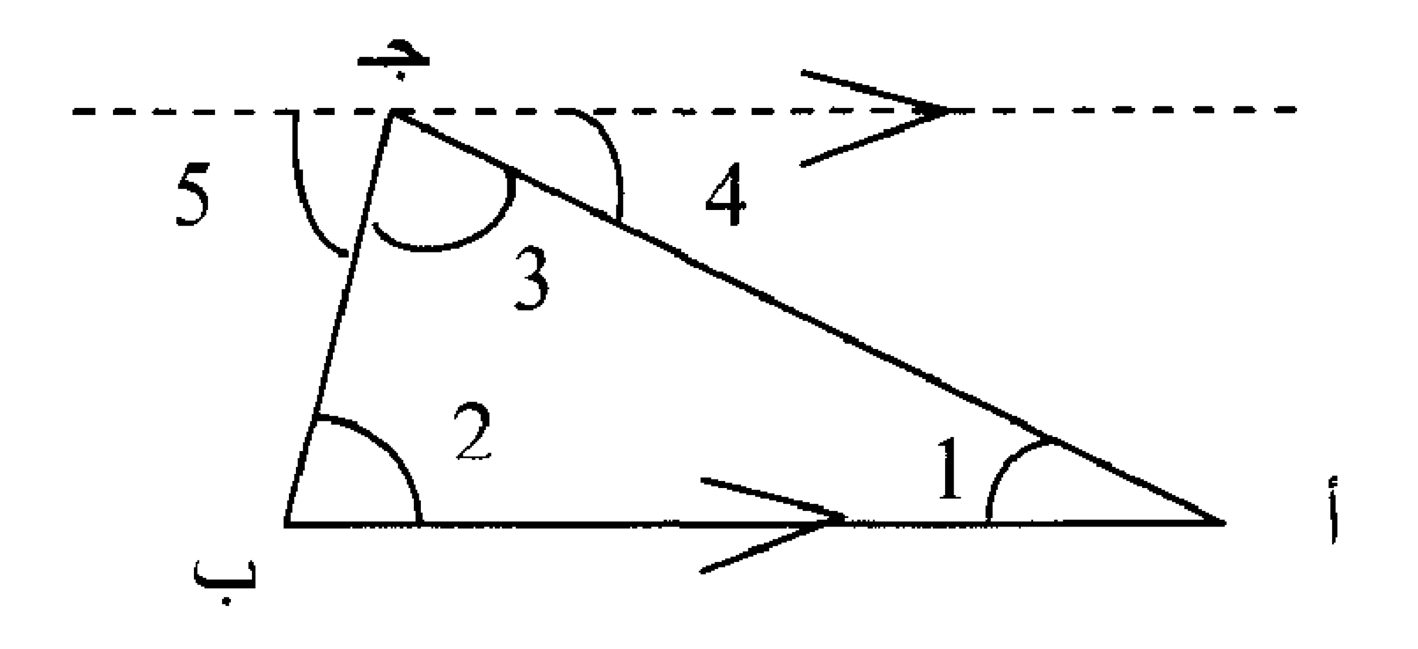
**المطلوب:** إثبات أنّ:

ق∢ أ + ق∢ ب + ق∢ جـ = 180°، أي أن:

ق∢ 1 + ق∢ 2 + ق∢ 3 = 180°

**العمل:** نرسم مستقيماً يمر بالرأس جـ ويوازي القاعدة أ ب

**البرهان:**




ق∢ $\hat{1}$ = ق∢ $\hat{4}$ زاويتان متبادلتان

ق∢ $\hat{2}$ = ق∢ $\hat{5}$ زاويتان متبادلتان

لكن ق∢ $\hat{4}$ + ق∢ $\hat{3}$ + ق∢ $\hat{5}$ = 180° (زاوية مستقيمة)

**بالتعويض ينتج أن:**

ق∢ $\hat{1}$ + ق∢ $\hat{3}$ + ق∢ $\hat{2}$ = 180°

**مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية يساوي 180°**

⇦ **مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلّع الذي أضلاعه ن ضلعاً يساوي:**
(ن – 2) × 180°

## المضلّع المنتظم:

وهو مضلّع تتساوى فيه قياسات زواياه وقياسات أطوال أضلاعه.

لاحظ أن قياس الزاوية الداخلية للمضلّع المنتظم الذي عدد أضلاعه ن تساوي:

$$\frac{(ن - 2) \times 180^\circ}{ن}$$

مثال:

1. أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلّع التساعي؟
2. أوجد قياس الزاوية الداخلية للثماني المنتظم؟
3. أوجد عدد أضلاع المضلّع المنتظم الذي قياس كل زاوية داخلية من زواياه تساوي $160^\circ$؟

1) مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلّع التساعي = $(9 - 2) \times 180^\circ$

$= 7 \times 180^\circ = 1260^\circ$

2) قياس الزاوية الداخلية للثماني المنتظم = $\frac{(8-2)\times 180^\circ}{8} = 135^\circ$

3) نفرض أن عدد أضلاع المضلّع المنتظم هو ن ضلعاً

❖ $160^\circ = \frac{(ن-2)\times 180^\circ}{ن}$

$(ن - 2) \times 180^\circ = 160^\circ$ ن

$180^\circ$ن $- 360^\circ = 160^\circ$ ن

$180^\circ$ن $- 160^\circ$ن $= 360^\circ$

$20^\circ$ن $= 360^\circ$

ن $= \frac{360^\circ}{20^\circ} = 18$ ضلعاً

## 2 – 6 أسئلة للمناقشة:

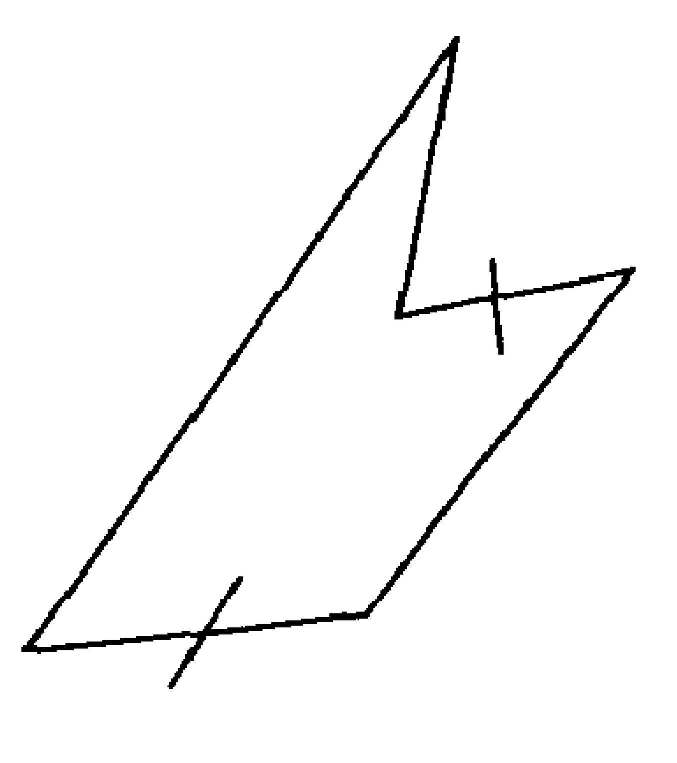
1) أعط مثالاً لكل مما يلي:

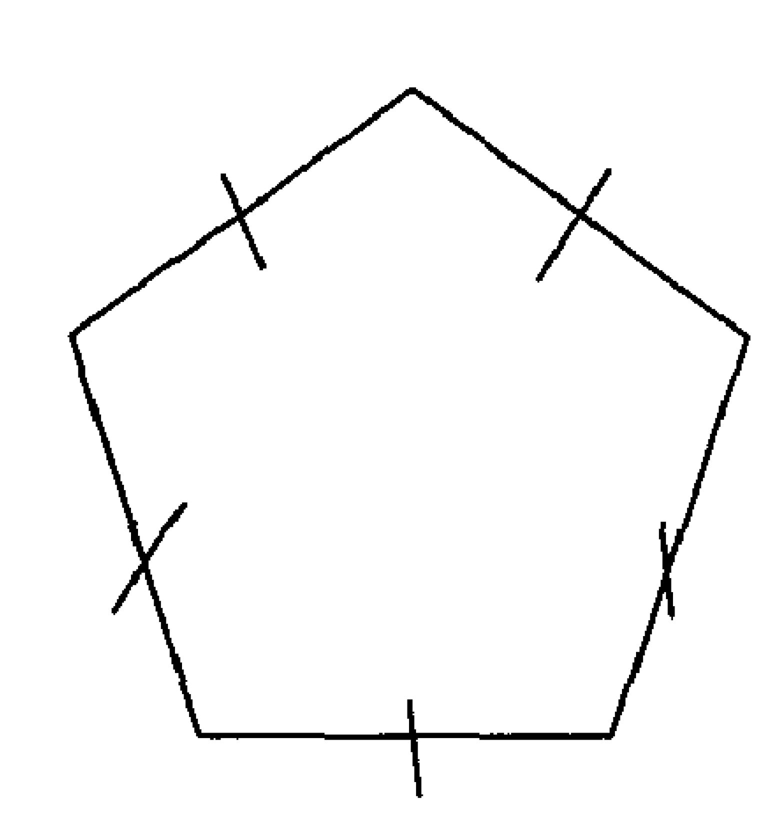
- نقطة.
- مستقيم.
- قطعة مستقيمة.
- مستوى.

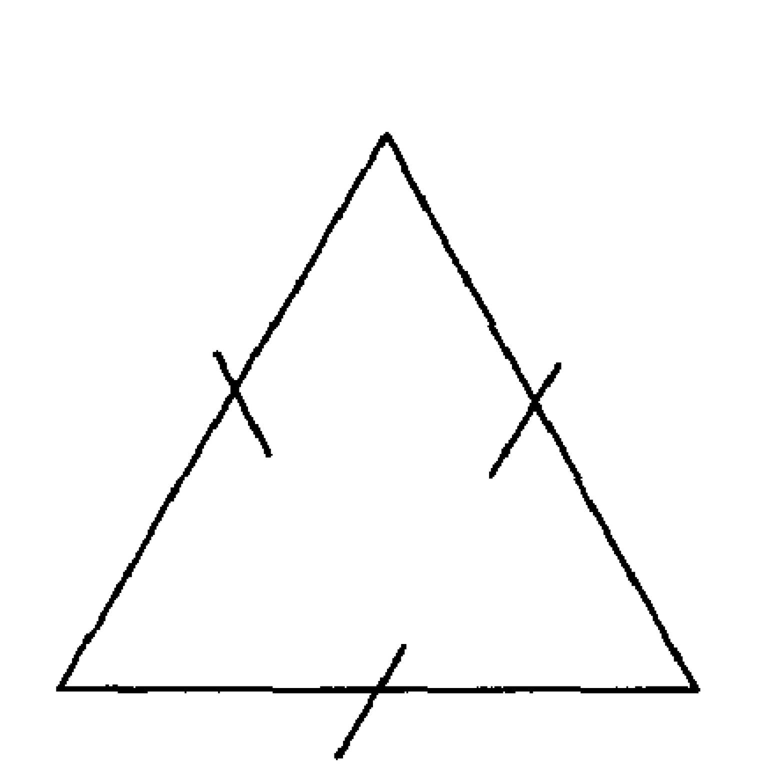
2) أي المسميات الأولية يعبّر عما يلي:

- حافّة دفتر.
- أرضية غرفة.
- سفينة في عرض البحر.
- ذرّة ملح.
- امتداد حافّة مسطرة.

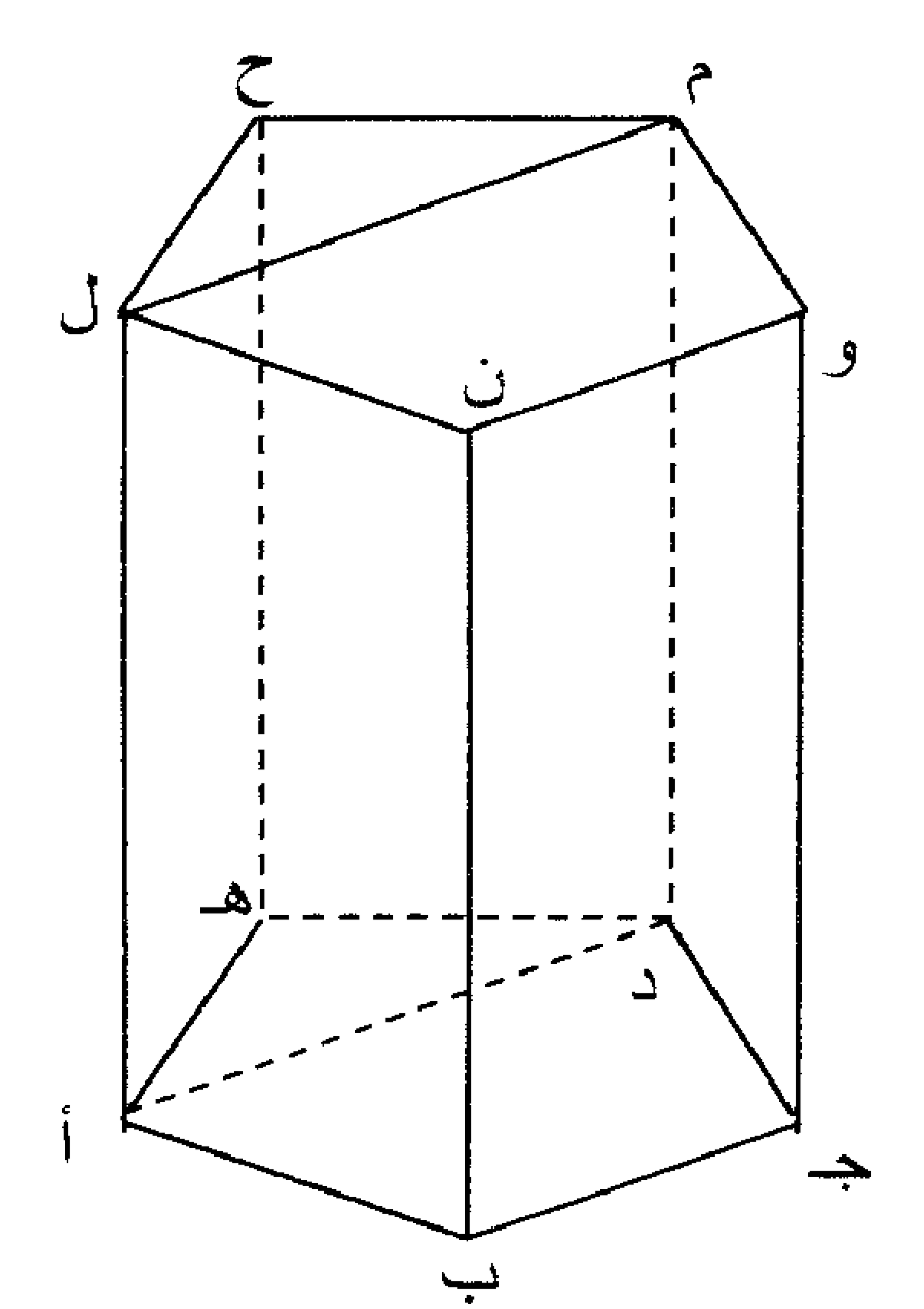
3) أي مما يلي يمثّل مضلّعاً منتظماً؟







4) اعتماداً على الشكل المجاور، أعط مثالاً لكل مما يلي:




- مستقيمان يخالفان المستقيم د هـ
- مستقيمان يعامدان المستقيم جـ ب
- 3 مستقيمات توازي المستقيم م د
- مستقيم يعامد المستوى م و ل
- مستقيم يقطع المستوى م و جـ د
- مستقيم يوازي المستوى جـ د أ
- زاوية زوجية
- زاوية زوجية حرفها المستقيم م ل

5) أي العبارات الآتية صحيحة وأيّها خطأ؟

- إذا وازى مستقيم مستوى فإنّه يوازي كلّ مستقيم فيه.
- من نقطة مفروضة خارج مستقيم معلوم لا يمكن رسم أكثر من مستقيم واحد يوازيه.
- المستويان العموديان على مستوى متوازيان.
- المستقيمان الموازيان لمستوى واحد متوازيان.
- إذا كان $\overleftrightarrow{ل} \perp \overleftrightarrow{م}$ ، $\overleftrightarrow{م} \perp \overleftrightarrow{ن}$ فإن $\overleftrightarrow{ل} \perp \overleftrightarrow{ن}$
- إذا توازى مستقيمان فأي مستقيم يقطع أحدهما يقطع الآخر.
- إذا توازى مستويان فأي مستقيم يقطع أحدهما يقطع الآخر.
- إذا وازى مستقيم مستوى فإنّه يوازي كل مستقيم فيه.

6) حدّد نوع كل زاوية مما يلي:

35°، 218°، 329°، 150°، 180°، 90°، 360°.

7) إذا كان:

ق∢س = 55″ 43′ 71°

ق∢ص = 27″ 52′ 15°

ق∢ع = 46″ 39′ 36°

أوجد:

- ق∢س + ق∢ع
- ق∢س − ق∢ص
- (ق∢س − ق∢ع) + ق∢ص
- 2 ق∢ع − 3 ق∢ص
- $\frac{1}{2}$ ق∢ص

# الفصل الثالث

# أساليب البرهان

3 – 1 البرهان المباشر:

- الحصر
- الإستقراء الرياضي
- الإستنتاجي المباشر

3 – 2 البرهان غير المباشر:

- المثال المعاكس
- التناقض
- المعاكس الإيجابي

3 – 3 أسئلة للمناقشة.

# الفصل الثالث

# الفصل الثالث

# أساليب البرهان

نحتاج للبرهان في إثبات صحّة الكثير من القضايا المنطقية التي نتعامل معها؛ إذ أن هذه القضايا تبقى مجرّد إدعاءات مالم يتمّ تقديم أدلّة على صحتها بالبرهان المنطقي.

والبرهان هو سلسلة من العَبارات المنطقية الصحيحة التي تستخدم لإثبات صحة عبارة أو خطئها (الحموز وآخرون، 2004).

**ومن أساليب البرهان الرياضي:**

أولاً: البرهان المباشر Direct Proof الذي يتمثّل بـ:

- البرهان بالحصر.
- البرهان بالاستقراء الرياضي.
- البرهان الاستنتاجي المباشر.

ثانياً: البرهان غير المباشر Indirect Proof الذي يتمثّل بـ:

- برهان المعاكس الإيجابي.
- برهان التناقض.
- المثال المعاكس.

## 3 – 1 البرهان المباشر Direct Proof

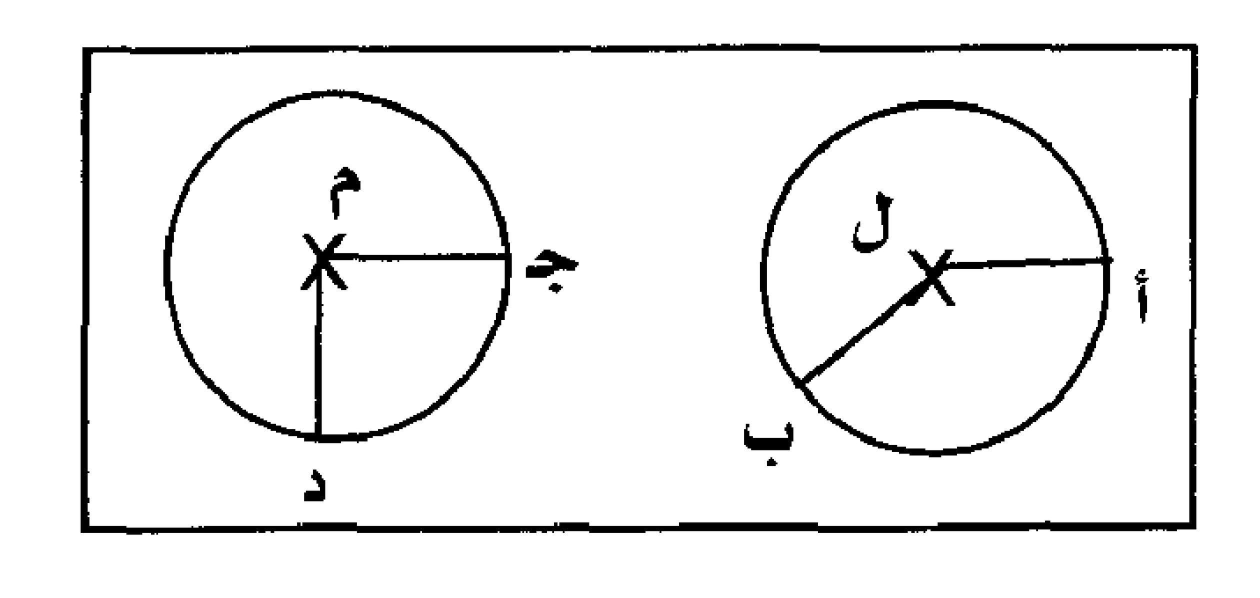
وهو البرهان الذي يثبت صحّة القضية، باستخدام صواب الفرضية مباشرة وبالاستعانة بقوانين التعويض وقواعد الاستنتاج للوصول إلى صواب النتيجة المباشرة.

وسنتطرّق هنا إلى ثلاثة أساليب من البرهان المباشر هي:

### (1) البرهان بالحصر Proof by inventory of all cases

يعتبر هذا الأسلوب أكثر أساليب البرهان بدائية، فهو يحتاج إلى حصر جميع الحالات المكنة ومعالجتها واحدة إثر أخرى، ممّا يجعله أسلوباً غير عملي إذا كثر عدد هذا الحالات.

مثال: برهن أنه "إذا تساوى نصفا قطري دائرتين فإن اختلاف طولي قوسين فيهما يؤدّي إلى اختلاف طولي وتري هذين القوسين"




البرهان:

أي برهن أنه إذا كان $\overset{\frown}{\text{أ ب}} \neq \overset{\frown}{\text{جـ د}}$ فإن أ ب ≠ جـ د إما أن يكون أ ب=جـ د، أو أ ب≠ جـ د.

بفرض أن أ ب = جـ د فإن $\overset{\frown}{\text{أ ب}} = \overset{\frown}{\text{جـ د}}$ (نظرية في الدوائر).

وهذا يتعارض مع المعطيات في أن $\overset{\frown}{\text{أ ب}} \neq \overset{\frown}{\text{جـ د}}$

تبقى الحالة الثانية (الحالة الوحيدة الممكنة) وهي أن $\overset{\frown}{\text{أ ب}} \neq \overset{\frown}{\text{جـ د}}$

**تدريب:** أثبت أنه إذا كان س عدداً حقيقياً، فإن $س^2 \leq$ صفر.

## (2) برهان الاستقراء الرياضي A Proof by Mathematical Induction

وهو برهان يهدف لإثبات صحة النظرية لجميع قيمها في ثلاث خطوات هي:

أ) نفترض صحّة العلاقة عند قيمتها الابتدائية

ب) نفترض صحّة العلاقة عندما ن = ك

ج) نثبت صحّة العلاقة عندما ن = (ك +1)

**مثال:** برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ....... + ن^2 = \frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{6} \text{ ، } \forall \text{ ن} \geq 1$$

**البرهان:**

1) نفترض صحة العلاقة عندما ن = 1، أي أن:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$$

$$1 = 1$$

2) نفترض صحّة العلاقة عندما ن = ك، أي أن:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ....... + ك^2 = \frac{ك(ك+1)(2ك+1)}{6}$$

3) نثبت صحّة العلاقة عندما ن = (ك + 1)، أي أن:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+\text{ك}^2+(\text{ك}+1)^2=\frac{\text{ك}(\text{ك}+1)(2\text{ك}+1)}{6}+(\text{ك}+1)^2$$

$$=\frac{\text{ك}(\text{ك}+1)(2\text{ك}+1)+6(\text{ك}+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(\text{ك}+1)\left(\text{ك}(2\text{ك}+1)+6(\text{ك}+1)\right)}{6}$$

$$=\frac{(\text{ك}+1)(2\text{ك}^2+\text{ك}+6\text{ك}+6)}{6}$$

$$=\frac{(\text{ك}+1)(2\text{ك}^2+7\text{ك}+6)}{6}$$

$$=\frac{(\text{ك}+1)(\text{ك}+2)(2\text{ك}+3)}{6}$$

$$=\frac{(\text{ك}+1)\left[(\text{ك}+1)+1\right]\left[2(\text{ك}+1)+1\right]}{6}$$

**وهو المطلوب**

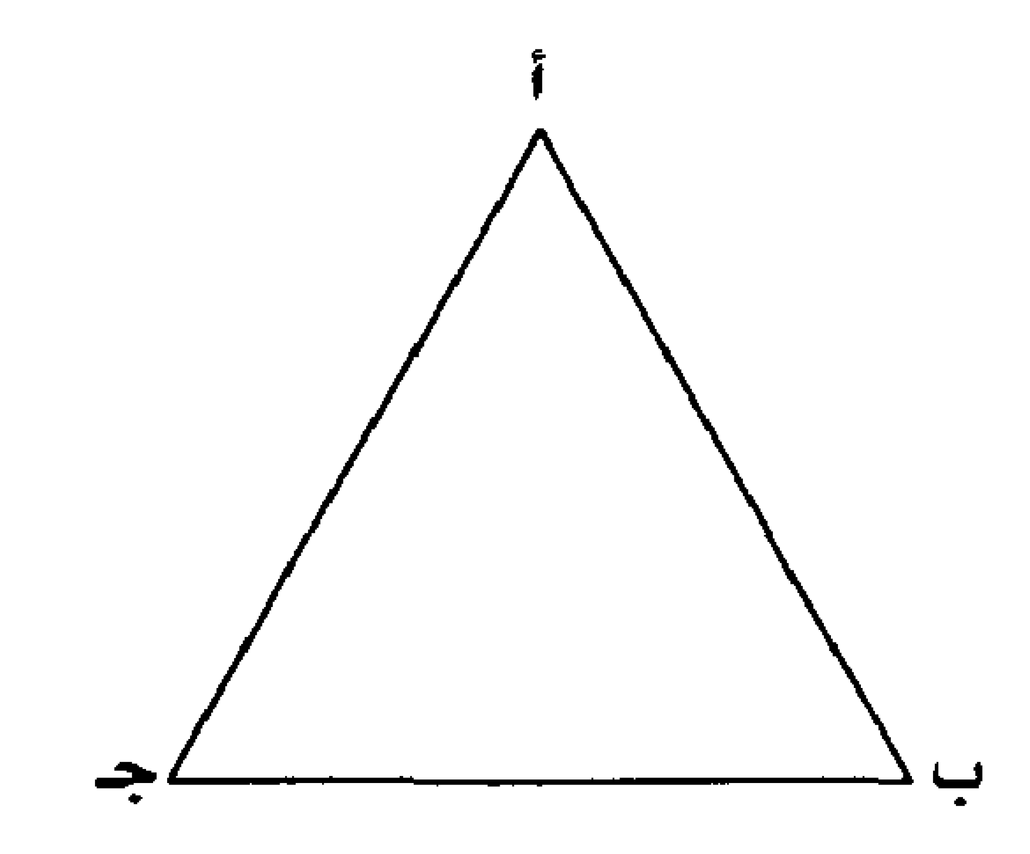
**تدريب:** أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن:

"مجموع قياسات زوايا أيّ مضلّع = 2ن – 4 من الزوايا القوائم حيث ن عدد الأضلاع"

### (3) البرهان الاستنتاجي المباشر Direct Deductive Proof

وهو برهان يستند على صواب العبارة ف، في العبارة الشرطية ف ⟵ ن للوصول إلى صواب العبارة ن (النتيجة للقضية)

**مثال:** برهن أنه "إذا تساوت أضلاع مثلث تساوت قياسات زواياه، وكان قياس كل منها يساوي 60°"




المعطيات: أ ب جـ مثلث فيه:

أ ب = أ جـ = ب جـ

المطلوب: إثبات أن:

ق ∠ أ = ق ∠ ب = ق ∠ جـ = 60°

البرهان: بما أن أ ب = أ جـ فإن ق ∠ جـ = ق ∠ ب (نظرية)......(1)

وبما أن أ ب = ب جـ فإن ق ∠ جـ = ق ∠ أ (نظرية)......(2)

من (1) و (2) ينتج أن:

ق ∠ جـ = ق ∠ ب = ق ∠ أ (بديهية)......(1)

لكن ق ∢ أ + ق ∢ ب + ق ∢ جـ = 180°   (مجموع قياسات زوايا المثلث = 180°)

$$\therefore \text{ق} \measuredangle \text{أ} = \text{ق} \measuredangle \text{ب} = \text{ق} \measuredangle \text{جـ} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

وهو المطلوب.

**تدريب:** أثبت باستخدام البرهان المباشر أنه إذا كان:

أ) "س عدداً طبيعياً زوجياً فإن مربعه $\text{س}^2$ هو عدد زوجي"

ب) " س، ص أعداداً فردية فإن مجموعها (س+ص) هو عدد زوجي"

## 3-2 البرهان غير المباشر *Indirect Proof*

وهو برهان يفترض عدم صحّة النتيجة للقضية، ثم يصل إلى تناقض منطقي، وله عدّة طرق منها:

### 1. المثال المعاكس Opposite Example

تبقى العبارة الرياضية صائبة مالم يؤتَ بمثال واحد على الأقل يتعارض معها.

**مثال:** "كل مستطيل هو مربّع"

صحيح أنه إذا ساوى طول المستطيل عرضه فإنّه يصبح مربعاً لكنه باختلاف طول المستطيل عن عرضه فإنه ليس مربعاً لأن ذلك يتعارض مع تعريف المربّع.

∴ هذه العبارة غير صحيحة دائماً.

**تدريب:** أعط مثالاً معاكساً يبيّن عدم صحّة س$^{3}$ − س = صفر في مجموعة الأعداد الصحيحة.

## 2. برهان التناقض Proof by Contradiction

وهو برهان نفترض فيه صواب نفي النتيجة، ثمّ باستخدام صحة الفرضيات، نحصّل منها تناقضاً.

**مثال:** برهن باستخدام برهان التناقض على صحّة النظرية التالية:

"إذا كان س عدداً طبيعياً زوجياً، فإن مربّعه (س$^{2}$) هو عدد طبيعي زوجي"

**الحلّ:**

**المعطيات:** س عدد طبيعي زوجي، أي أن "س = 2ن".....(1)، حيث ن عدد طبيعي.

المطلوب: إثبات أن: س$^{2}$ عدد طبيعي زوجي

البرهان: نفترض صحة نفي النتيجة أي أن "س$^{2}$ ليس عدداً طبيعياً زوجياً"
إذن " س$^{2}$ عدد طبيعي فردي" ومنه:

س$^{2}$ = 2م+1 ، حيث م عدد طبيعي

ومنه س = $\sqrt{2م + 1}$ ...... (2)

من (1) و (2) ينتج أن:

2 ن = $\sqrt{2م + 1}$

بتربيع كلا طرفي المساواة ينتج أنّ:

4 ن$^{2}$ = 2 م + 1

2 (2ن$^{2}$) = 2 م + 1 وهذا تناقض لأن 2(2ن$^{2}$) هي عدد زوجي مساوٍ للعدد الفردي (2 م + 1)

**تدريب:** برهن باستخدام برهان التناقض أنّه إذا "كانت أ نقطة مفروضة خارج مستقيم م فإنّه لا يمكن رسم أكثر من عمود واحد على المستقيم م مارًا بالنقطة أ".

### 3. برهان المعاكس الإيجابي Proof by Contrapositive

وهو برهان يفترض صواب نفي النتيجة، ثمّ نستنتج نفي الفرضية.



**مثال:** أثبت باستخدام برهان المعاكس الإيجابي أنّه:

"إذا تساوت زاويتان في مثلّث فإنّه متساوي الساقين".

س

ع ص



**الحل:**

**المعطيات:** س ص ع مثلث فيه ق∢ ص = ق∢ ع

**المطلوب:** إثبات أن $\overline{\text{س ع}}$ = $\overline{\text{س ص}}$

**البرهان:** نفترض أن س ع ≠ س ص، أي نبدأ بعكس المطلوب

∴ ق∢ص ≠ ق∢ع (نظرية)

وهذا عكس المعطى

∴ النظرية صحيحة

**تدريب**: أثبت باستخدام برهان المعاكس الإيجابي أنه:

"إذا كان س عدداً تامّاً فإن س عدد ليس أولياً".

> **ملاحظة**: العدد التام هو عدد يساوي مجموع قواسمه دون العدد نفسه.
> مثل: 6 = 1+2+3 (مجموع قواسمه دون 6)
> ∴ 6 عدد تام
> لكن 8 عدد غير تام لأن مجموع قواسمه (دون 8)
> 1+2+4 = 7 وليس 8

**الحل:**

المعطيات: س عدد تام

المطلوب: إثبات أن س عدد ليس أولياً.

البرهان: نفرض أن س عدد أولي (عكس المطلوب).

بما أن س $\leq 2$ فإن قواسمه عددان هما 1، س نفسه

وعليه مجموع قواسمه التي أقل منه هو 1 فقط.

وهذا يعني أن س عدد ليس تام وهو عكس المعطى.

∴ س عدد غير أولي.

## 3-3 أسئلة للمناقشة:

1) استخدم البرهان المباشر في إثبات كل مما يأتي:

أ. إذا كانت س، ص أعداداً طبيعية زوجية، فإن (س$^2$ + ص$^2$) هو عدد طبيعي زوجي.

ب. قياس الزاوية الخارجية في مثلث ما يساوي مجموع قياس الداخليتين غير المجاورتين لها.

ج. إذا كان ل م ن مثلث، ق∠ ل > ق∠ م فإن م ن > ل ن

2) استخدم البرهان غير المباشر في إثبات كل مما يأتي:

أ. أعط مثالاً معاكساً يبين عدم صحة س$^2$ = س في مجموعة الأعداد الصحيحة.

ب. إذا كان س$^2$ عدداً فردياً، فإن س عدد فردي

ج. إذا قطع قاطع مستقيمين وكان قياس الزاويتين المتبادلتين متساوياً فإن المستقيمين متوازيان.

3) أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي:

أ. $1+2+3+\dots\dots+ن = \frac{ن(ن+1)}{2}$

ب. $1+2+2^2+2^3+\dots\dots+2^{ن} = 2^{ن+1} - 1$، $\forall$ ن $\geq 0$.

ج. ن! $\geq 2^{ن-1}$ ، $\forall$ ن $\geq 1$.

## الفصل الرابع

# الإنشاءات الهندسية

4 – 1 ماهية الإنشاء الهندسي.

4 – 2 الإنشاء الهندسي باستعمال المسطرة والفرجار.

4 – 3 الإنشاء باستعمال المسطرة دون الفرجار.

4 – 4 الإنشاء باستعمال الفرجار.

4 – 5 أسئلة للمناقشة.

# الفصل الرابع

# الفصل الرابع
# الإنشاءات الهندسية

## 4–1 ماهية الإنشاء الهندسي:

عرف موضوع الإنشاء الهندسي منذ القدم في عهد الإغريق، ولذا يسميه البعض الإنشاء الإقليدي. وبطبيعة الحال فإن لكل من الأدوات الهندسية الأخرى، من مثل: المنقلة، والمسطرة المدرجة دوراً يؤديه في الرسم الهندسي، لكن استخدام هذه الأدوات في الإنشاء الهندسي غير مسموح به وإن سهّل استخدامها إنجاز الرسومات والتصاميم.

كيف يتمّ الإنشاء الهندسي؟ إنه يتم بالمسطرة غير المدرجة والفرجار (المدور) معاً أو باستعمال أحدهما فقط. فمثلاً: تحديد تقاطع مستقيمين كل واحد منهما معطى بنقطتين. يتم ذلك بالمسطرة، في حين أن إنشاء دائرة نصف قطرها معلوم، وكذا مركزها، يتم ذلك بالفرجار أما تحديد تقاطع دائرة ومستقيم معطى بنقطتين فيتم ذلك بالفرجار والمسطرة.

وفي هذا المجال لا تستخدم المسطرة لقياس الأطوال مثلاً بل تستخدم لرسم الخطوط المستقيمة، أما الفرجار فهو أداة رسم الدوائر وأقواسها لا غير. ولا يجوز استخدام فتحة الفرجار مثلاً لقياس أو نقل الأطوال.

وباختصار يمكن القول أن:

- الفرجار يفيد في تساوي المسافات بين نقاط، إذ أن جميع النقاط الواقعة على دائرة تبعد نفس المسافة عن مركز الدائرة.

- المسطرة تفيد في وصل النقاط بخطوط مستقيمة، أي بتحديد كافة النقاط التي تقع على استقامة واحدة مع نقطتين معلومتين.

وسنتناول في هذا الفصل بعضاً من هذه الإنشاءات الهندسية.



## 4 – 2 الإنشاءات الهندسية باستعمال المسطرة والفرجار

يمكن إتباع الخطوات الآتية في كلٍ من:

**رسم قطعة مستقيمة طولها معلوم:**

1. نرسم خطاً مستقيماً باستخدام المسطرة.
2. نفتح الفرجار فتحة تساوي طول ضلع القطعة المستقيمة على الفرجار.
3. نحدد نقطة على المستقيم مثل س.
4. نركز رأس الفرجار في س ونرسم قوساً يقطع الخط المستقيم في ص فنحصل على القطعة المستقيمة س ص.

**نقل قطعة مستقيمة ورسم قطعة تطابقها:**

1. نرسم خطاً مستقيماً باستخدام المسطرة.
2. نفتح الفرجار فتحة تساوي طول القطعة المستقيمة س ص.
3. نحدد نقطة على المستقيم مثل س.
4. نركز رأس الفرجار في س ونرسم قوساً يقطع الخط المستقيم في ص فنحصل على القطعة المستقيمة س ص.

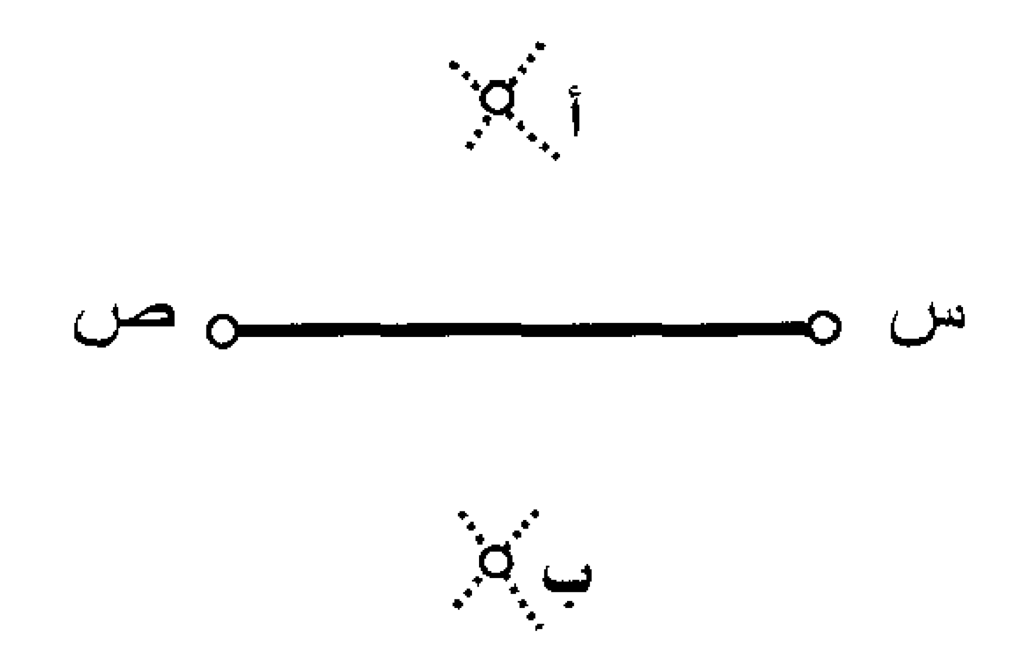
## الإنشاءات الهندسية

**إنشاء محور قطعة مستقيمة:**

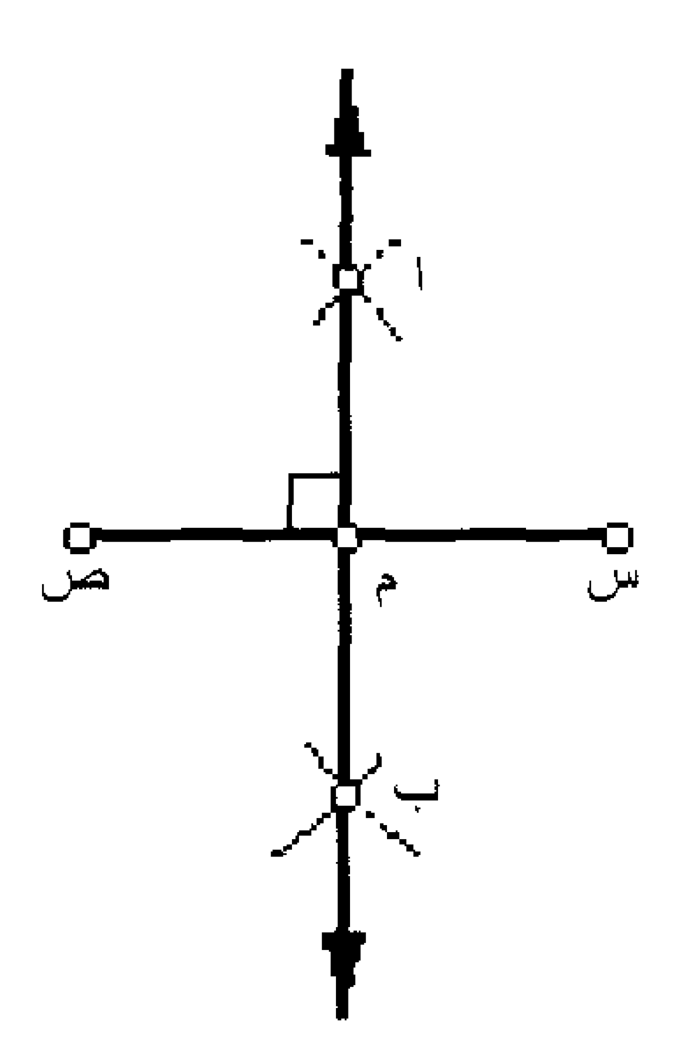
1. لتكن س ص قطعة مستقيمة

س ص

2. ننشئ دائرتين (أو قوسي دائرتين) متساويتي نصف القطر، ومركزاهما في النقطتين س ، ص على أن يكون القطر المشترك للدائرتين أكبر من طول القطعة س ص. يضمن هذا الشرط وجود تقاطع في نقطتين للدائرتين.



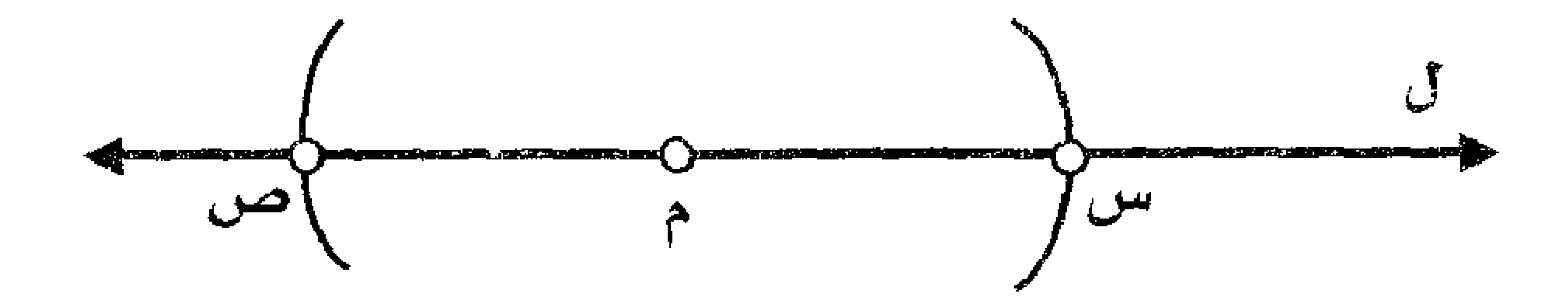

3. تتقاطع الدائرتان (أو القوسان) في النقطتين أ و ب. نستخدم الآن المسطرة وننشئ المستقيم الذي يصل النقطتين أ و ب. هذا المستقيم هو محور القطعة س ص.



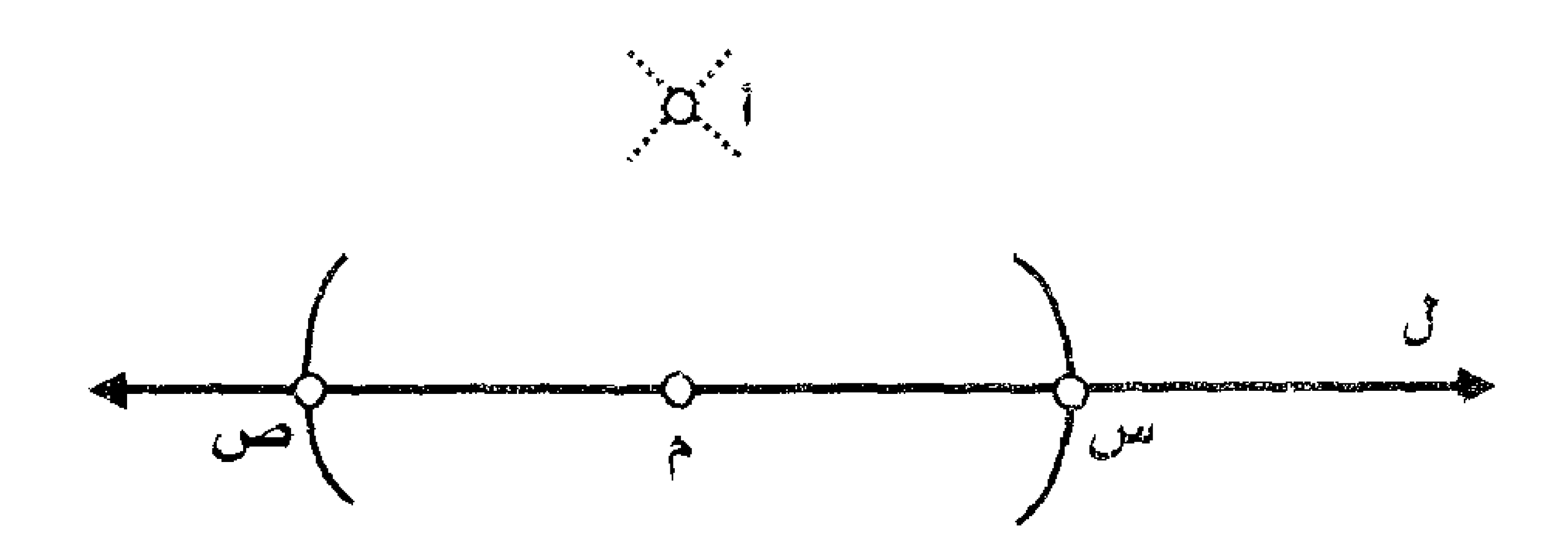

ملاحظة: النقطة م التي تمثل تقاطع المحور مع القطعة المستقيمة س ص هي منتصف هذه القطعة. ومن ثم فهذا الإنشاء يعين أيضاً منتصف قطعة مستقيمة معطاة.

**إنشاء مستقيم يعامد مستقيما معلوما عند نقطة معلومة:**

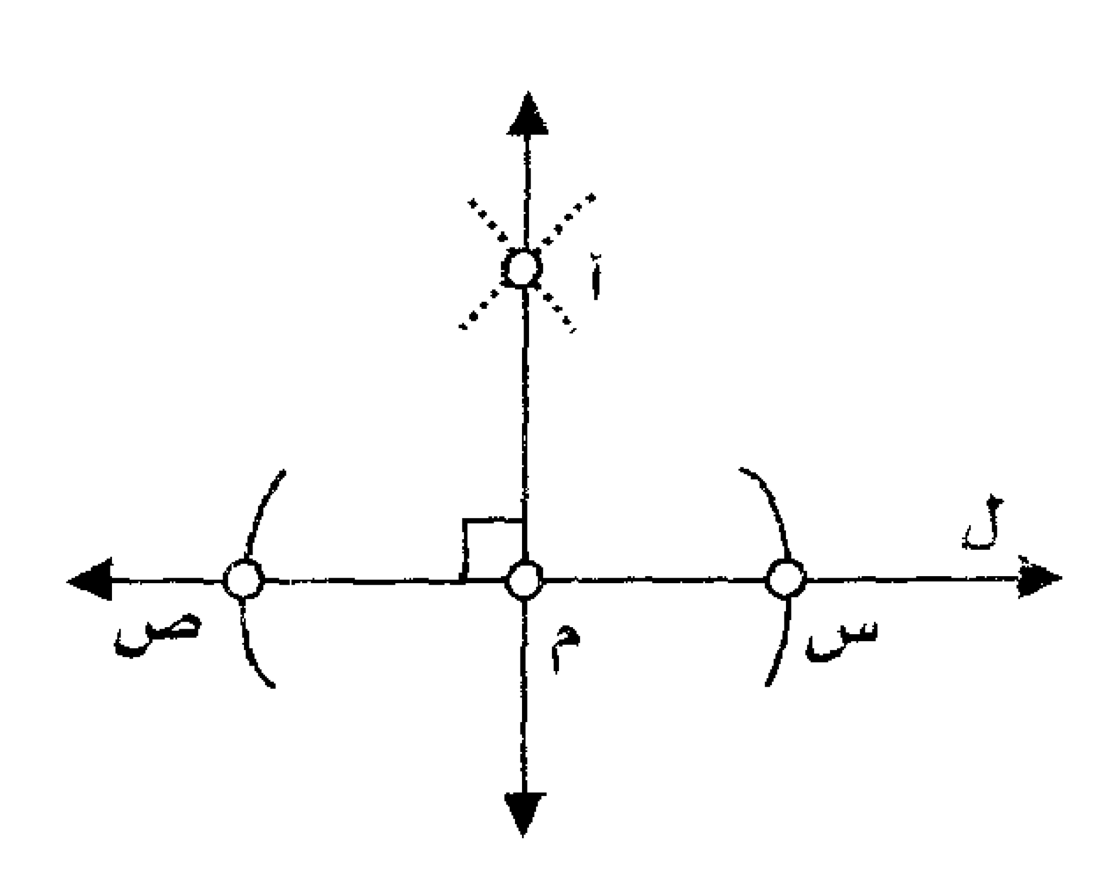
1. نسمي المستقيم المعطى (ل) و تكون (م) النقطة الواقعة عليه التي ينبغي أن يمر بها المستقيم المطلوب إنشاؤه.
2. نرسم دائرة مركزها النقطة م فتقطع المستقيم ل في نقطتين س و ص:




3. ننشئ دائرتين مركزاهما س ، ص تلتقيان على الأقل في نقطة نسميها آ:



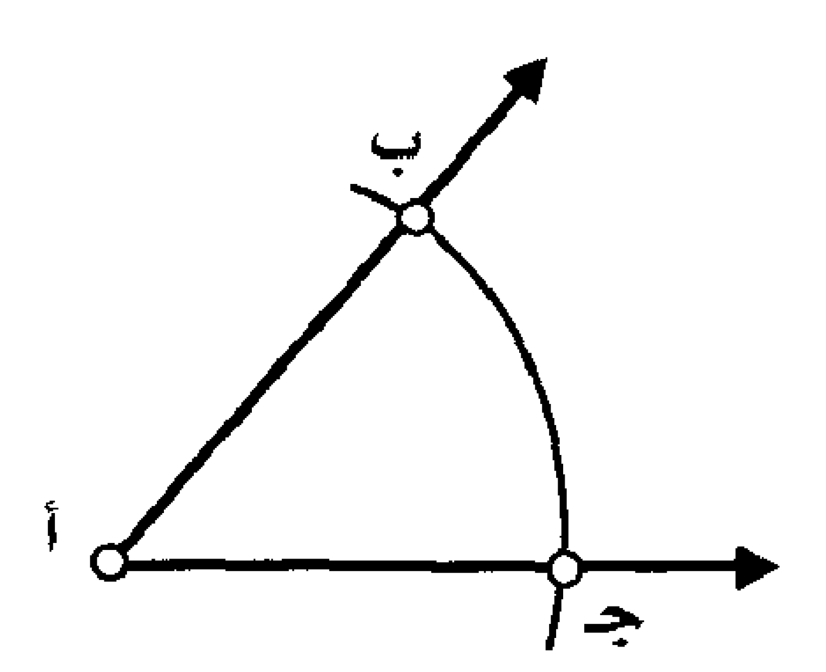

المستقيم المطلوب هو المستقيم (أ م).



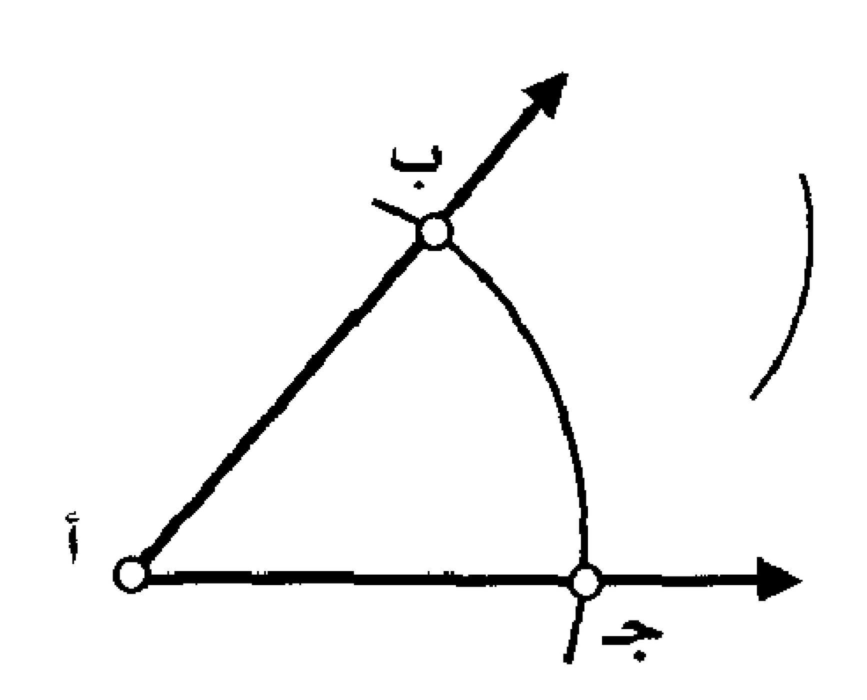
# الإنشاءات الهندسية

**إنشاء منصف زاوية:**

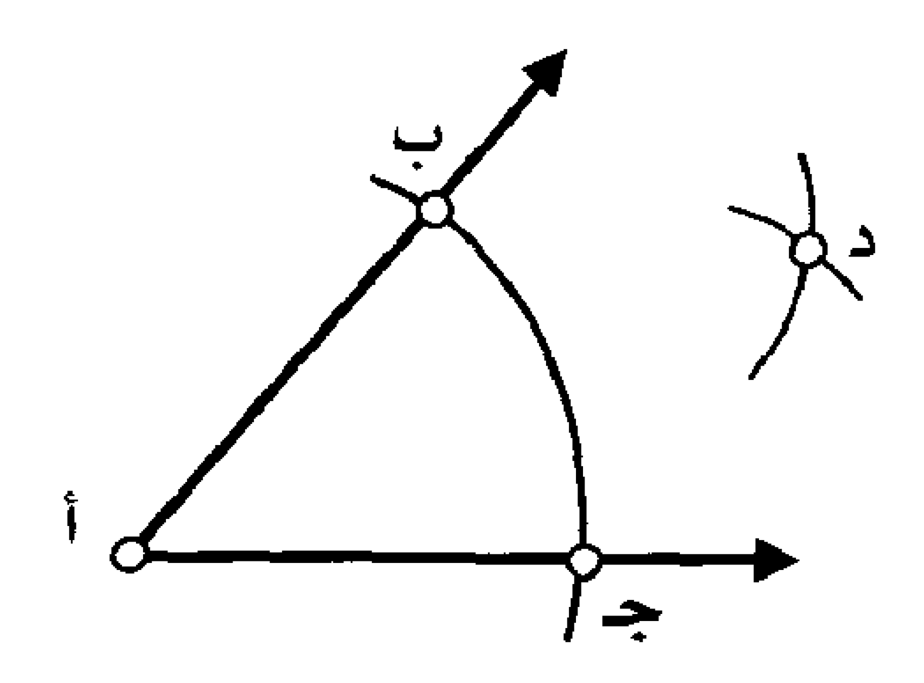
1. نفتح الفرجار فتحة مناسبة ونرسم قوساً مركزه أ ويقطع ضلعي الزاوية في ب، جـ.



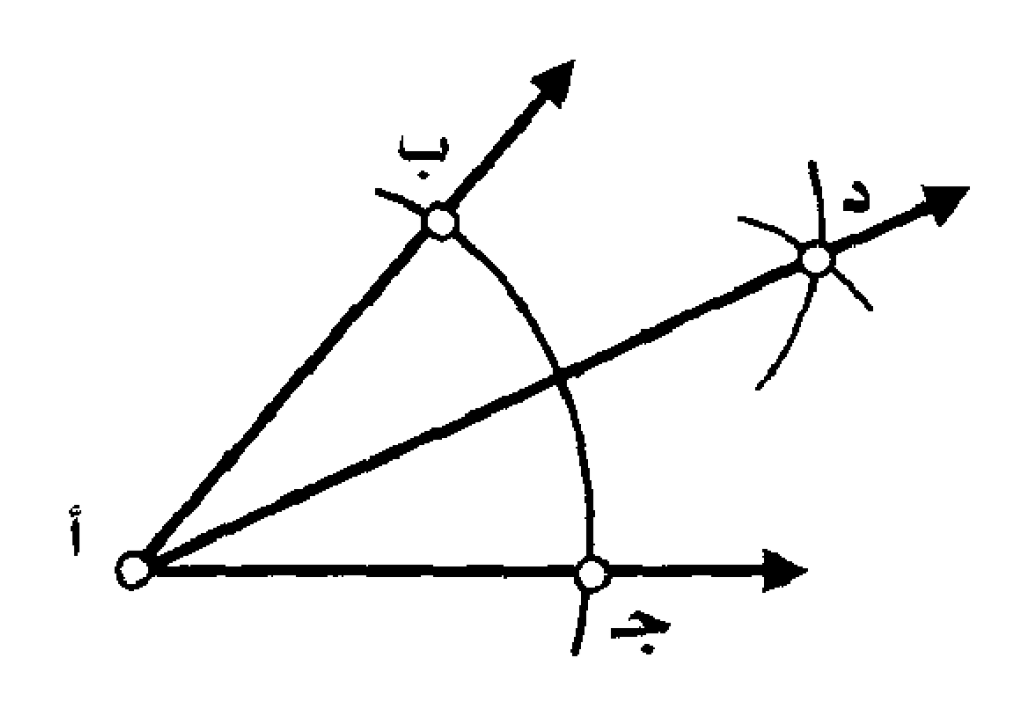

2. بنفس الفتحة أو فتحة أكبر من الأولى نرسم قوساً مركزه ب.




3. بنفس الفتحة أيضاً نرسم قوساً مركزه جـ فيتقاطعان في د.



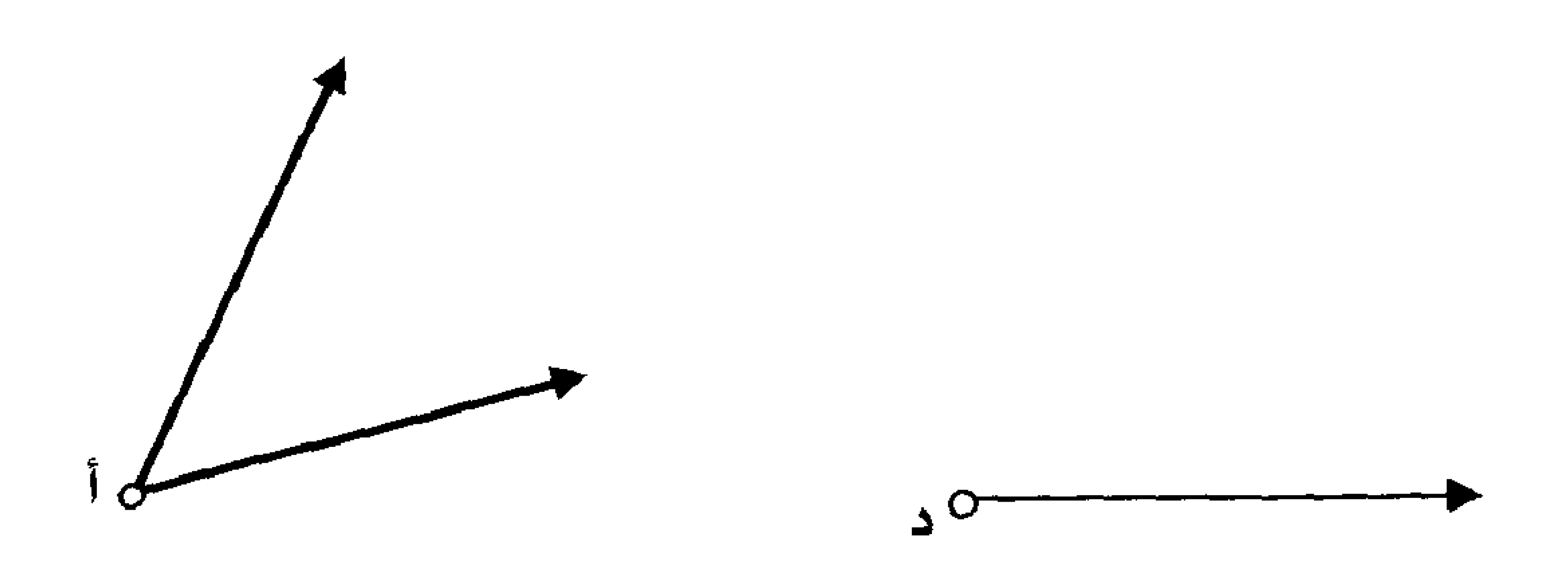
4. نصل أ مع د.



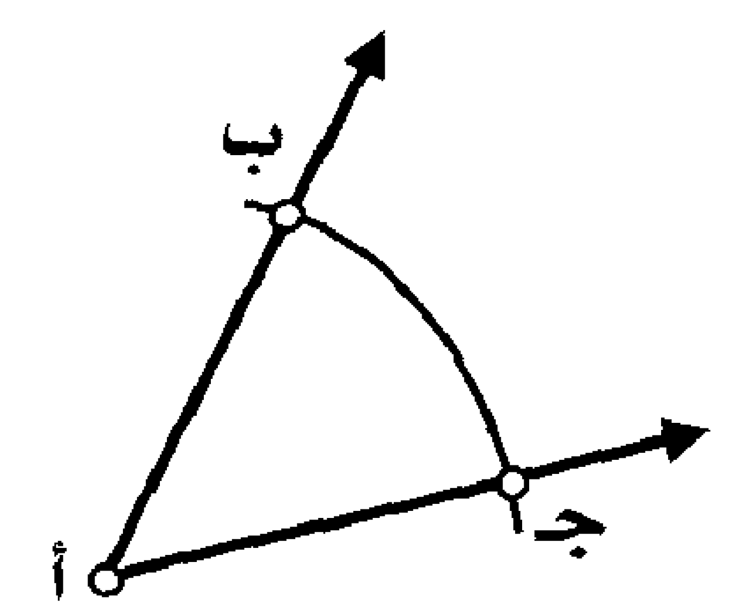

المنصف المطلوب هو أ د.

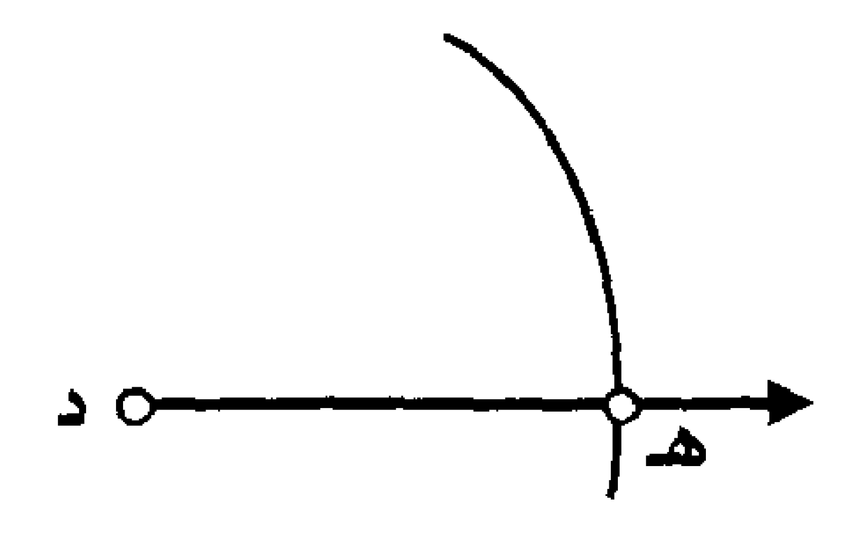
**إنشاء زاوية مساوية لزاوية معلومة:**

1. نسمي رأس الزاوية المعطاة أ، وليكن نصف مستقيم معطى نسمي طرفه د. المطلوب هو إنشاء نصف مستقيم طرفه في د بحيث تكون الزاوية المحصل عليها مساوية للزاوية المعطاة.

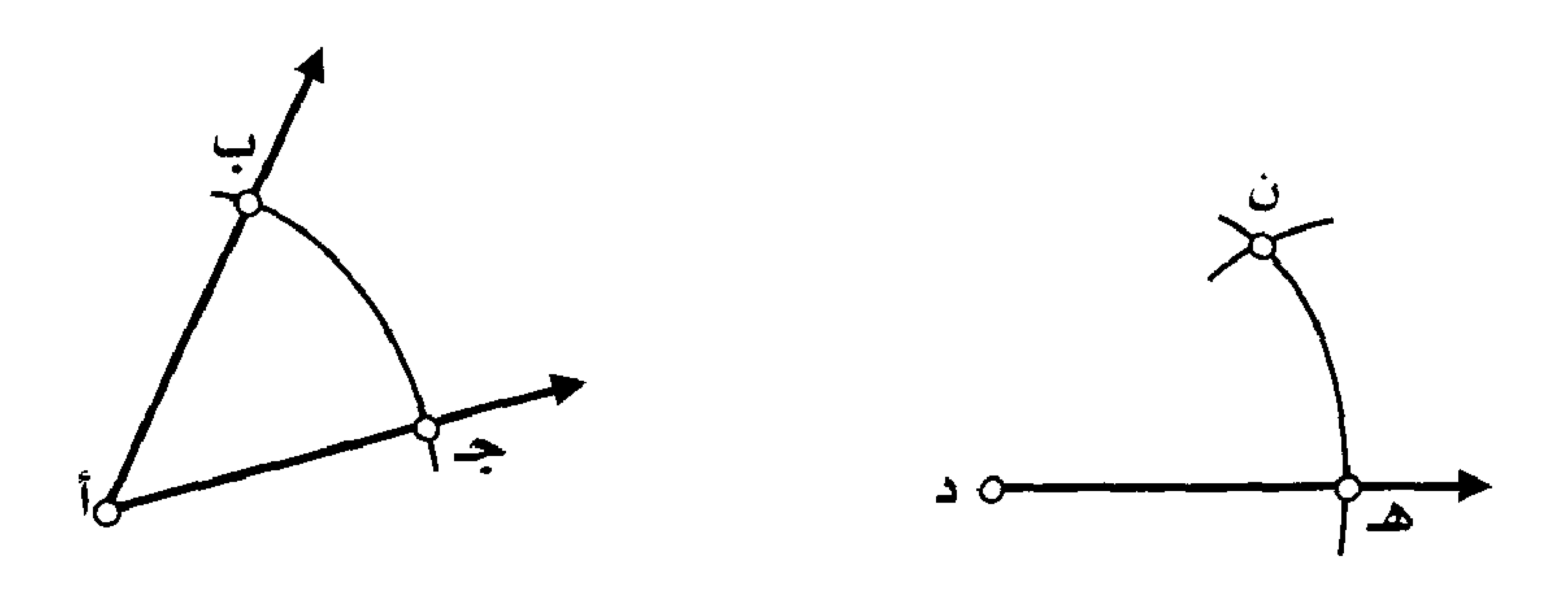



2. ننشئ دائرة مركزها د تقطع نصف المستقيم المعطى في نقطة نسميها هـ، وبنفس فتحة الفرجار نرسم قوس الدائرة ذات المركز أ فيقطع هذا القوس ضلعي الزاوية في نقطتين نسميهما ب و جـ.

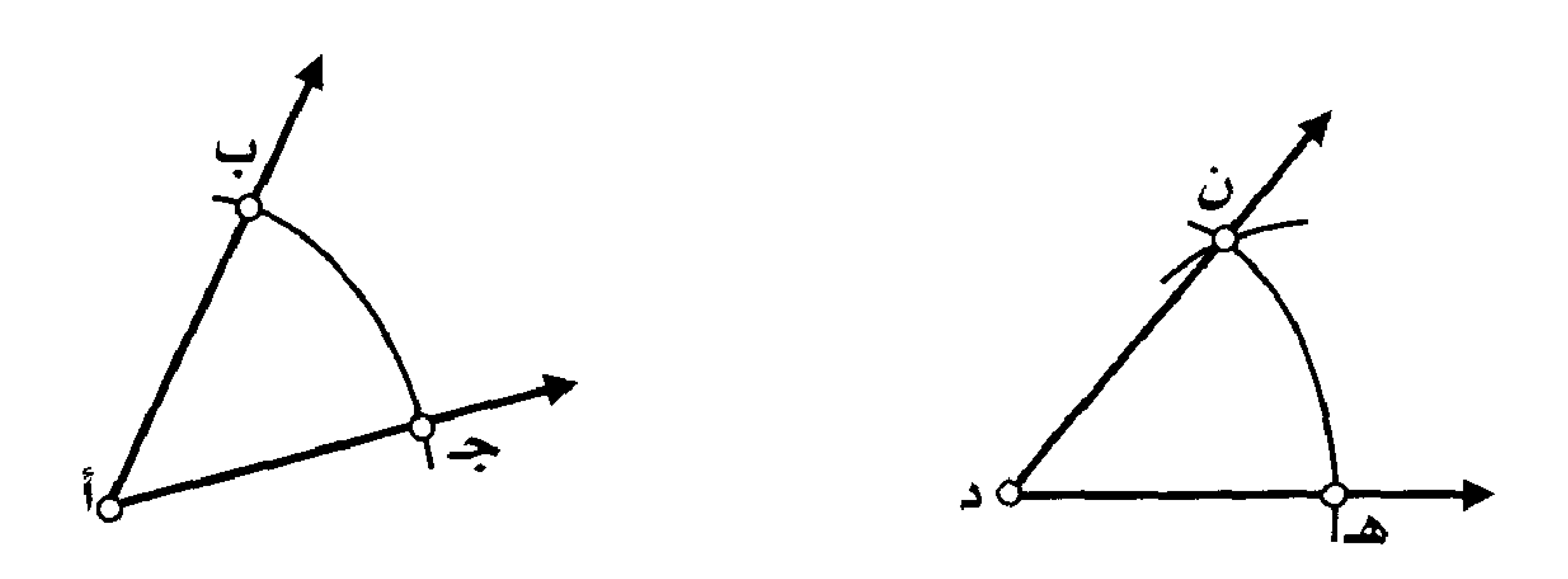


3. ننشئ النقطة ن المحصل عليها بتقاطع الدائرة ذات المركز هـ ونصف القطر ب جـ مع القوس الذي سبق إنشاؤه (انظر الشكل).

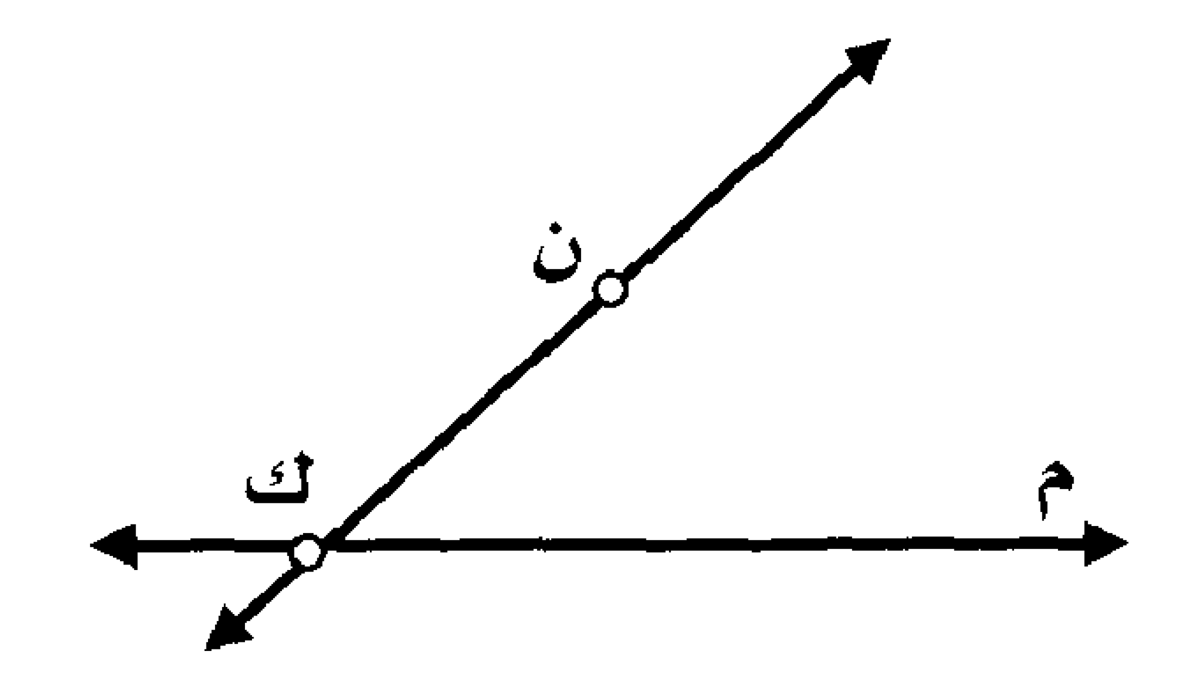



4. الزاوية هـ د ن المحصل عليها تساوي الزاوية المعطاة جـ أ ب.

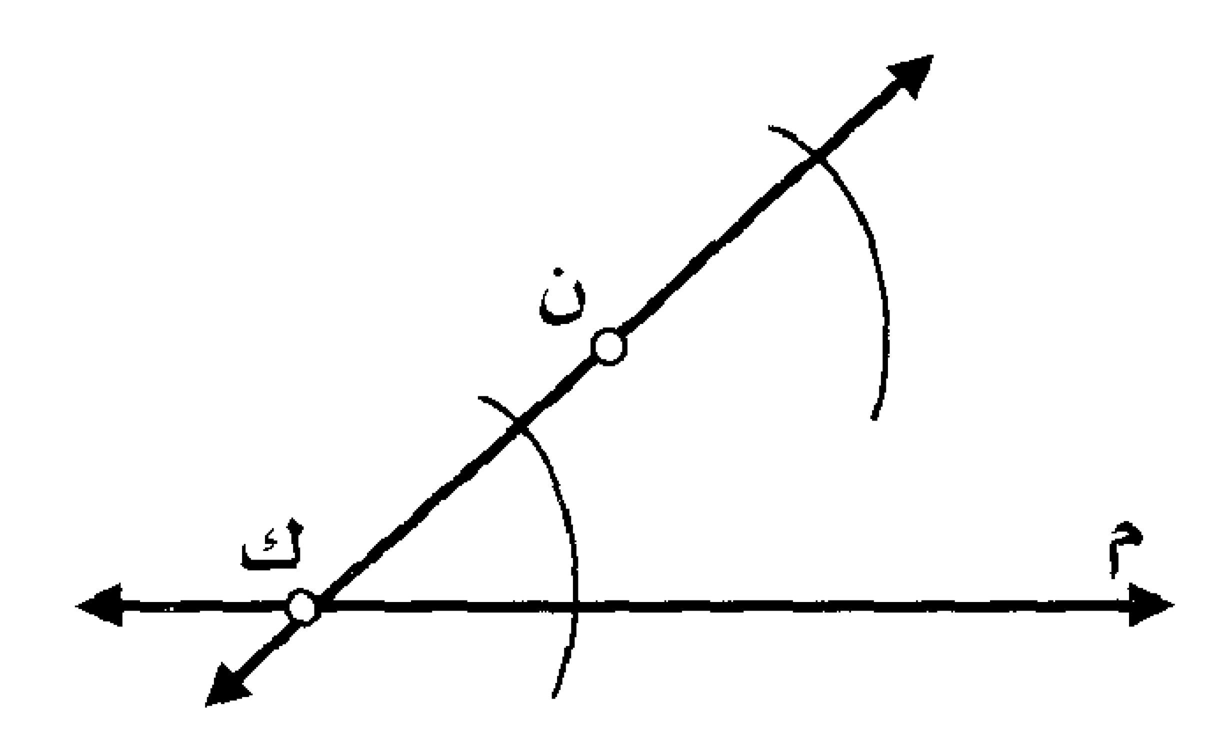



**إنشاء مستقيم يمر بنقطة معلومة ويوازي مستقيما معطى:**

1. نرسم مستقيماً يمر بالنقطة ن فيقطع المستقيم م في نقطة ك .

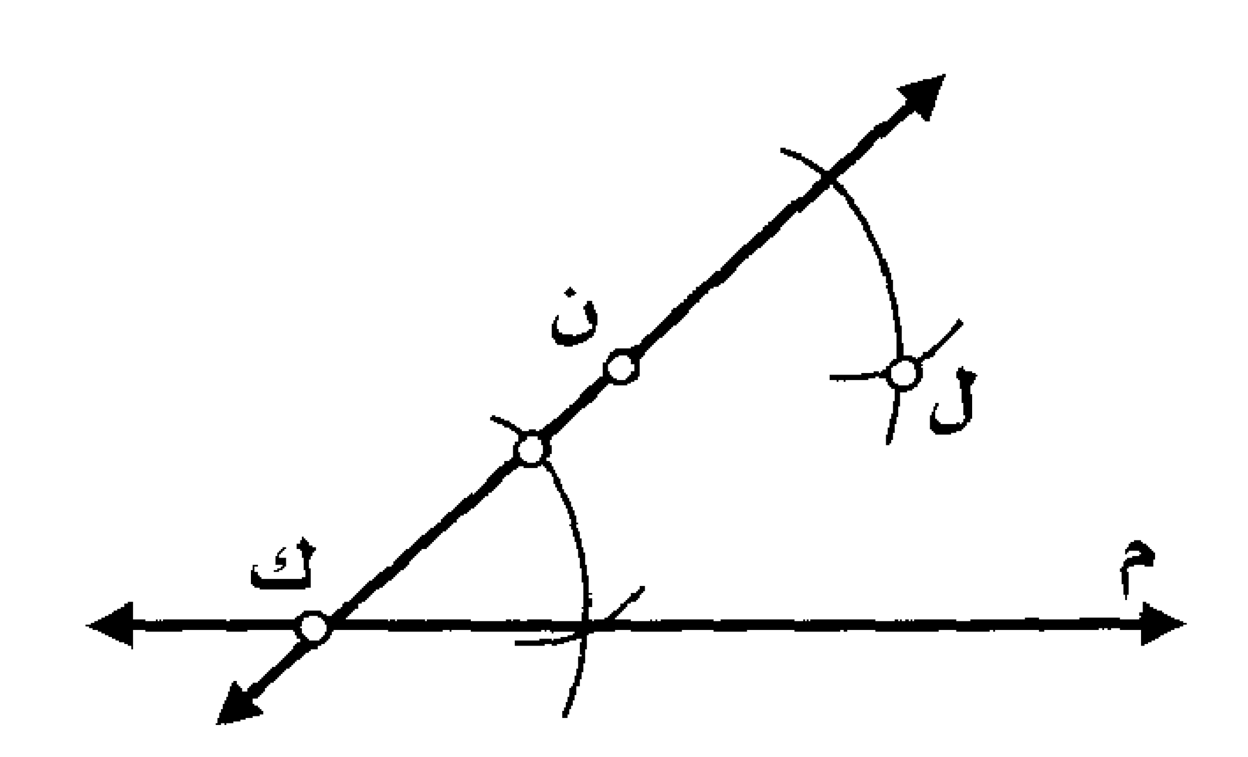


2. ننشئ قوسي دائرتين لهما نفس نصف القطر، مركز الأولى في النقطة ك والثانية في النقطة ن.

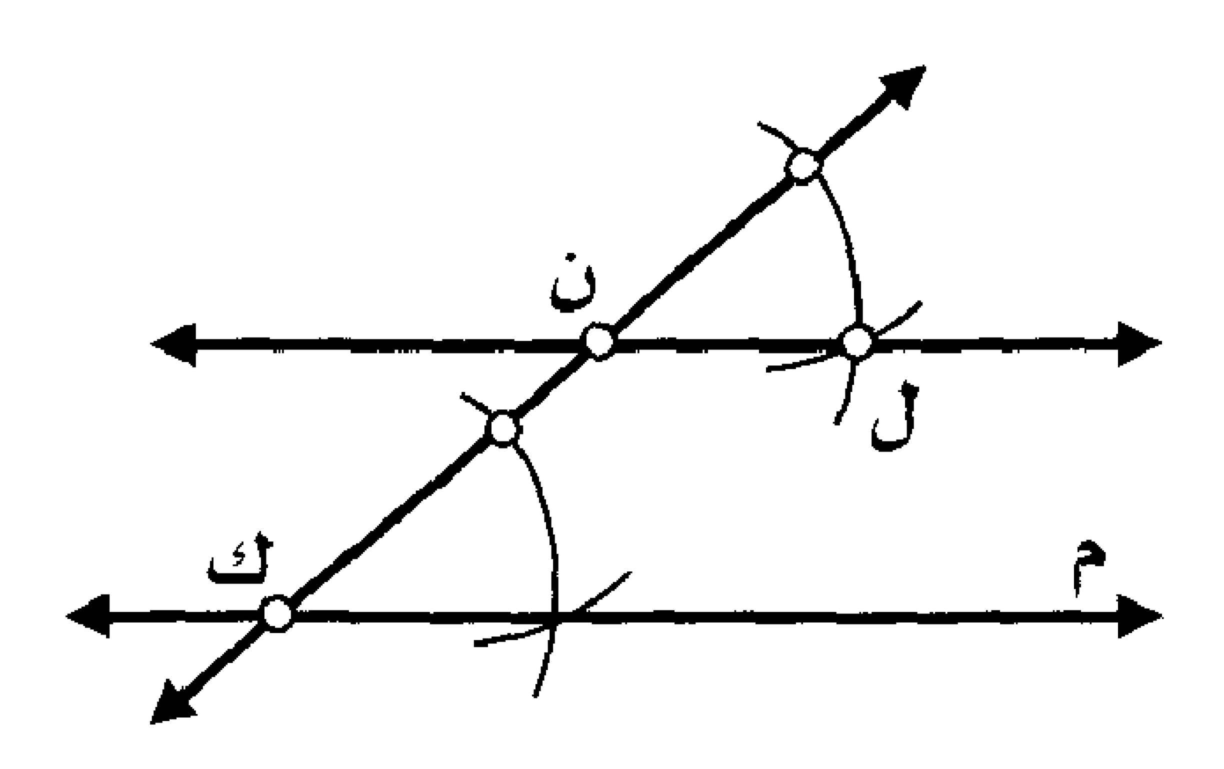



3. لتكن ف المسافة بين نقطتي تقاطع القوس الأول مع المستقيمين

(م) و (ن ك) نرسم (كما في الشكل) الدائرتين اللتين نصفا قطريهما ر ومركزاهما نقطتي تقاطع القوسين المرسومين آنفا مع المستقيم (ن ك) فنحصل على النقطة و المبيّنة في الشكل.



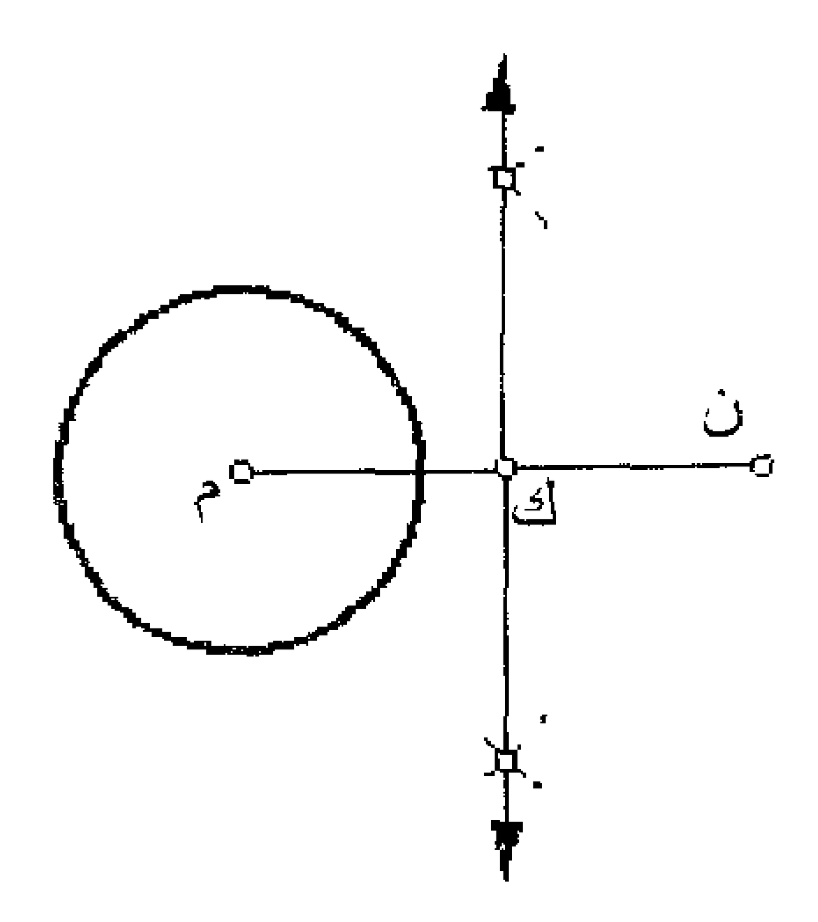

4. المستقيم (ن ل) هو المستقيم المطلوب.



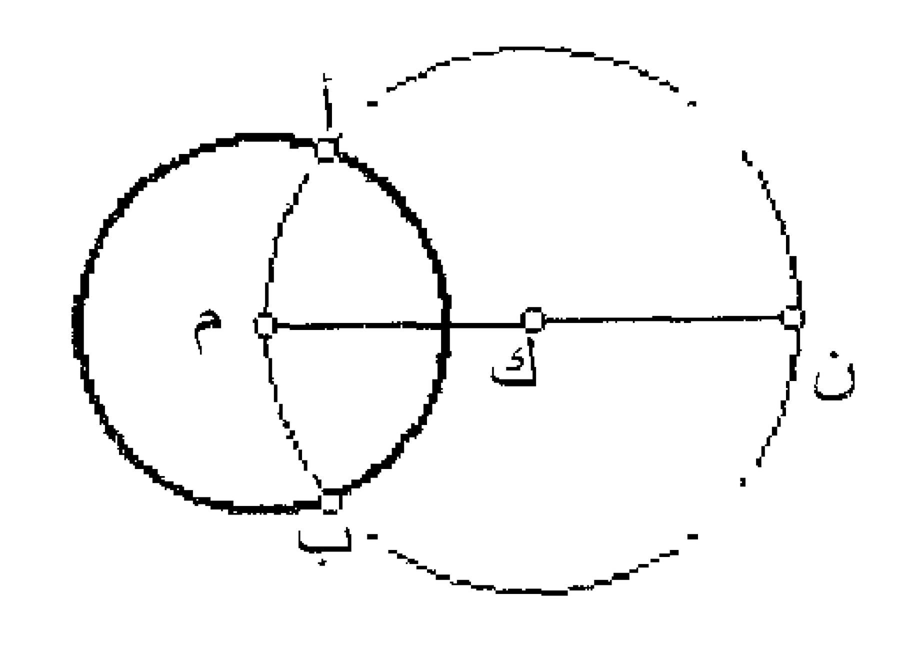
**إنشاء مماسين لدائرة معطاة (مع مركزها) ومارين من نقطة معلومة ن خارج الدائرة:**

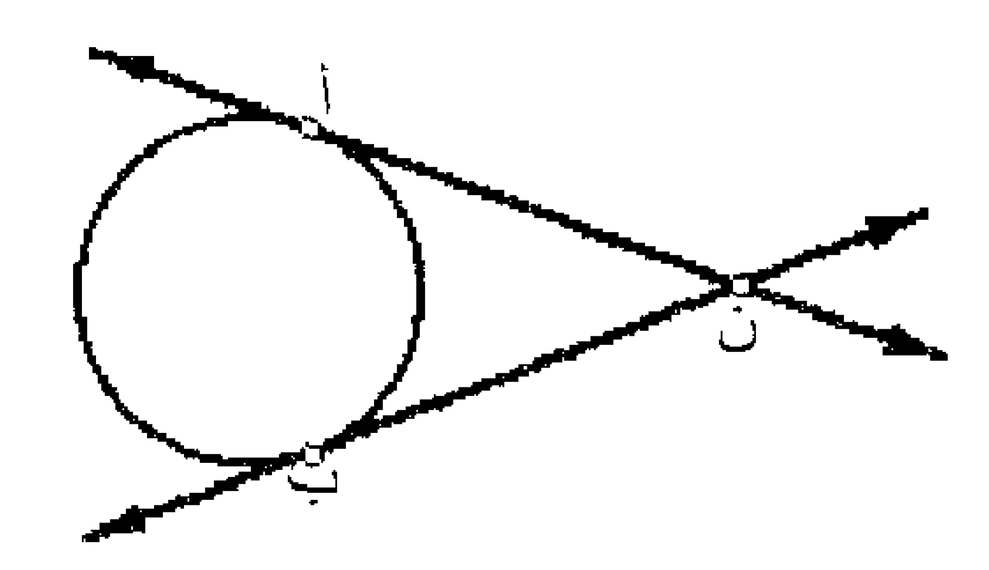
**تدريب:** استخلص خطوات الإنشاء من الأشكال التالية:



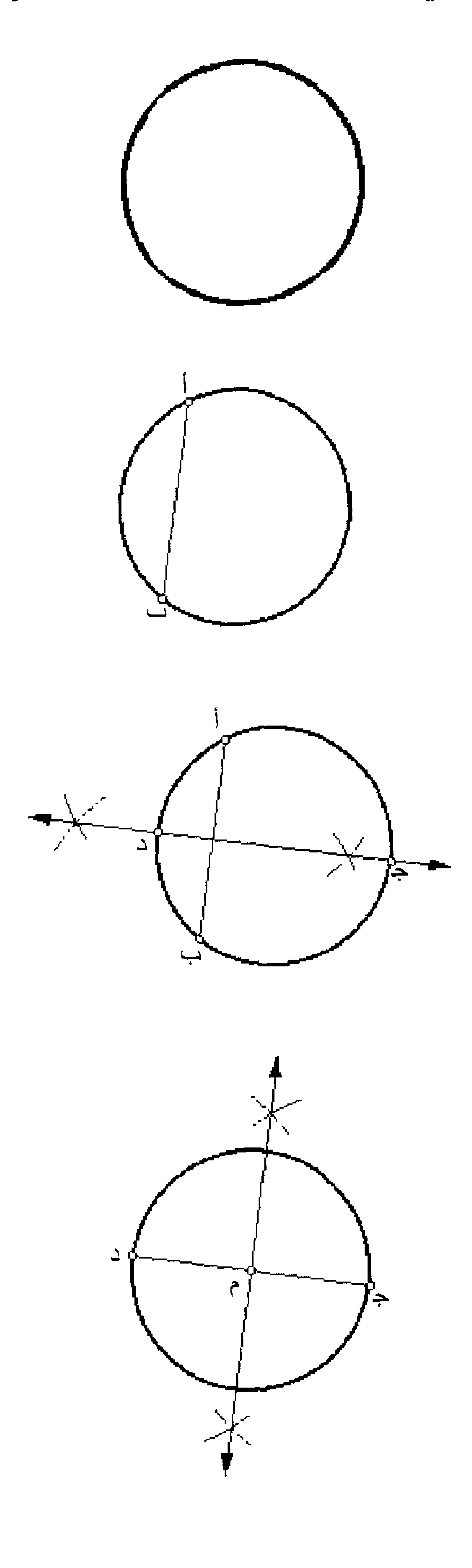

لاحظ أن ك هي منتصف القطعة (ن م).



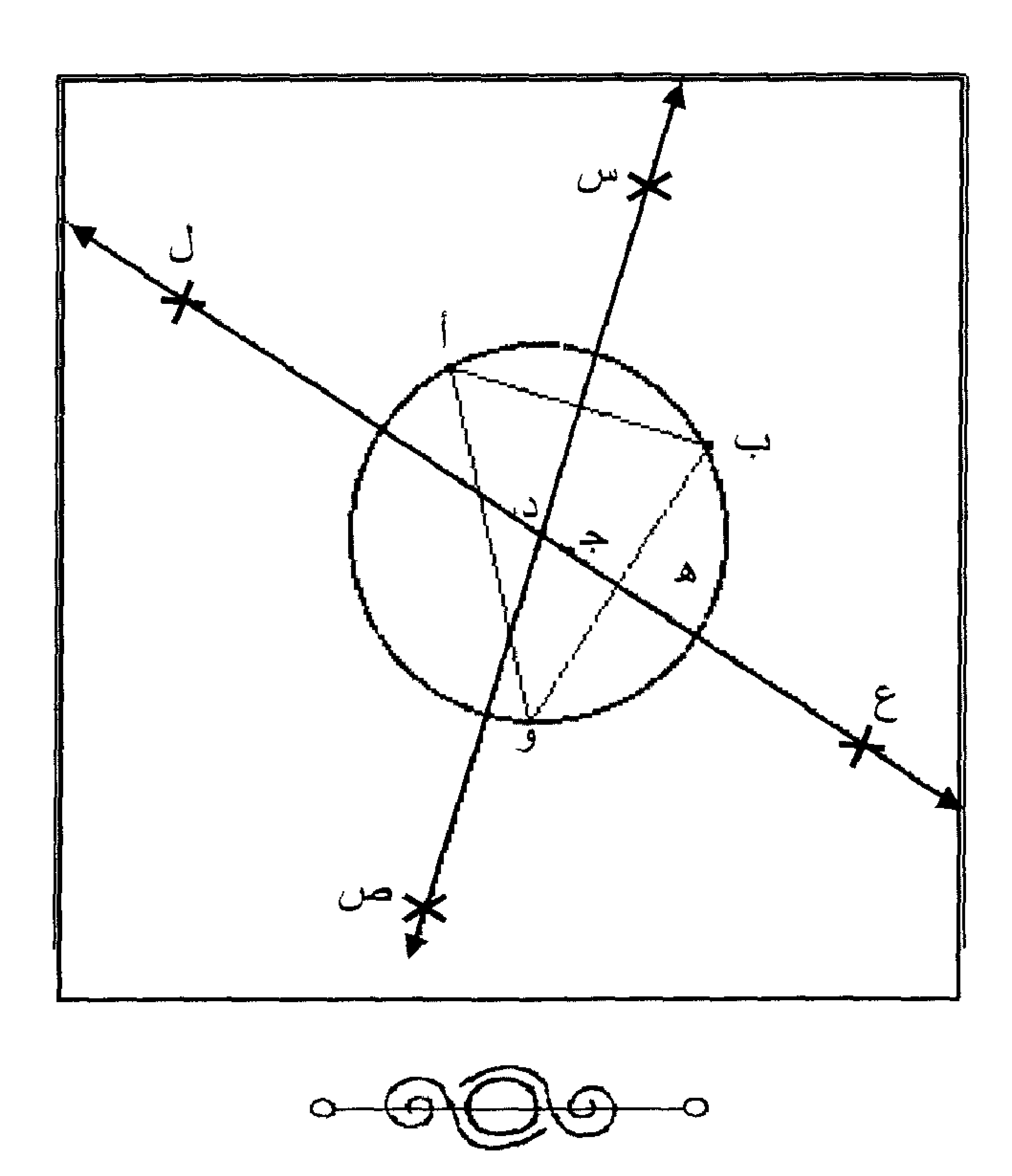
**إنشاء مركز دائرة:**

**تدريب:** الأشكال المتتالية هي المطلوبة في الإنشاء، حدد خطوات الإنشاء.



**ملاحظة:**

يمكننا أيضا الاعتماد على النتيجة التالية: تلتقي محاور المثلث في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث. ومن ثم يكفي اختيار 3 نقاط A ، B ، C من الدائرة وإنشاء محورين لضلعين من الأضلاع التي تشكلها تلك النقاط، فيكون المركز المطلوب هو نقطة تقاطع المحورين (المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ في الشكل التالي).



## 4-3 الإنشاء بالمسطرة دون الفرجار:

ألّف الرياضي السويسري (الألماني حسب البعض) شتاينر (Steiner,1976-1863) كتاباً سنة 1833 تحت عنوان "الإنشاءات الهندسية التي تستعمل خطاً مستقيماً ودائرة ثابتة". وقد بحث في الإنشاءات التي يمكن إنجازها بالمسطرة وحدها دون اللجوء إلى الفرجار. تسمى أحيانا الهندسة التي تستخدم المسطرة دون الفرجار "هندسة شتاينر" أو "إنشاءات شتاينر". وكانت أهم نتيجة توصل إليها شتاينر هي النظرية التالية:

**نظرية شتاينر**

كل إنشاء هندسي ينجز بالفرجار والمسطرة يمكن إنجازه بالمسطرة وحدها، شريطة أن تُعْطي دائرة ثابتة في المستوى (أي على الصفحة التي تنجز فيها هذه الإنشاءات).

**ملاحظة هامة:**

إلا أن ذلك لا يعني أننا نستطيع مثلاً رسم دائرة باستعمال مسطرة! فهذا من المستحيلات. والمقصود من هذه النظرية هو أنه بالإمكان الحصول على كل نقطة تقاطع دائرتين أو دائرة ومستقيم كتقاطع مستقيمين شريطة أن ترسم دائرة (واحدة) على الصفحة التي ننجز فيها الإنشاءات.

يبدو أن الرياضي الهولندي فرانس فان سكوتن(Franc Van Schooten) (1615 – 1661) هو أول من بحث في حل مسائل الإنشاءات الهندسية بواسطة المسطرة وحدها.

ومن المسائل الإنشائية التي تتم بالمسطرة دون الفرجار إنشاء تقاطع دائرة ومستقيم وتقاطع دائرتين.

إن مسائل الإنشاء الهندسي لم تتوقف عند هذا الحد؛ ولعل ما يؤكد ذلك ما اشتهر به داوسون (T.R. Dawson) الذي اهتم بالمسائل ذات الارتباط بلعبة الشطرنج، وقد رأى أن:

| كل إنشاء هندسي يمكن إنجازه بالفرجار والمسطرة<br>يمكن إنشاؤه بأعواد الثقاب المتساوية الطول. |
|---|

فمثلاً يمكن إنشاء محور ومنتصف قطعة مستقيمة باستعمال 7 أعواد ثقاب، كما يمكن إنشاء مربع باستعمال 14 عود ثقاب.



### 4 – 4 الإنشاء بالفرجار وحده:

لم يكتف المهندسون بالإنشاء باستعمال المسطرة والفرجار، بل ذهب بعضهم للبحث عن إمكانية إنجاز هذه الإنشاءات بالفرجار وحده دون الاستعانة بالمسطرة. وفي هذا الإطار كتب الرياضي الإيطالي ماسكروني (Mascheroni, 1797) الذي عاش خلال الفترة (1750 – 1800) مؤلفاً أسماه (هندسة المدور) أي هندسة الفرجار وقد ترجم إلى عدة لغات مثل الفرنسية والألمانية، وبرهن ماسكروني فيه على النظرية التالية:

"كل إنشاء هندسي ينجز بواسطة الفرجار والمسطرة يمكن إنجازه باستخدام الفرجار وحده"

لقد برهن أدلر (Adler, 1890) بطريقة متميزة على النظرية السابقة، واقترح طريقة عامة لحل مسائل الإنشاء الهندسي بواسطة الفرجار وحده. هذا وتُسمى الهندسة التي تهتم بالإنشاءات المنجزة بالفرجار وحده هندسة المدور.

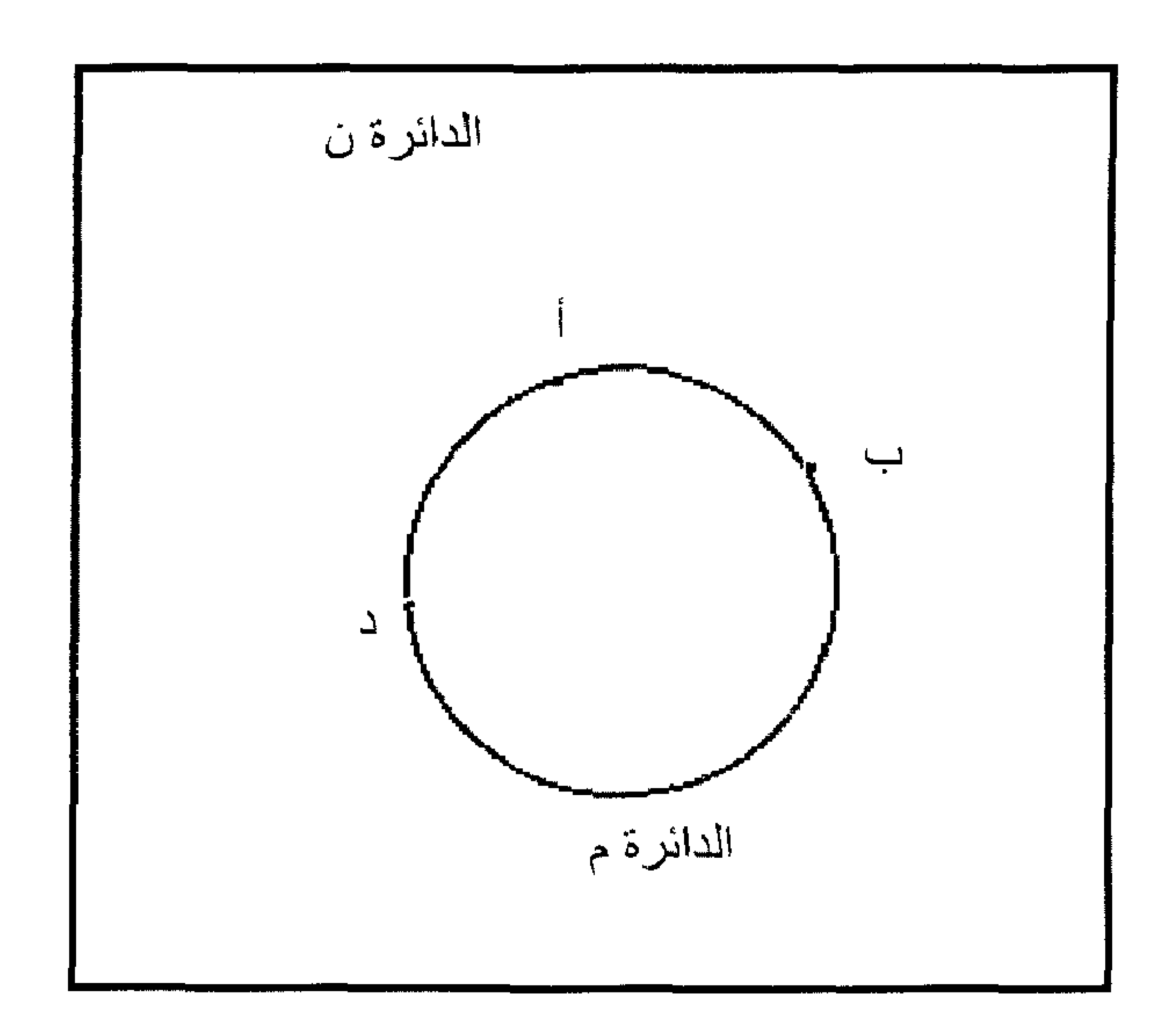
# الفصل الرابع

## إنشاء مركز دائرة معطاة بالفرجار وحده (تعرف هذه المسألة بمسألة نابليون)

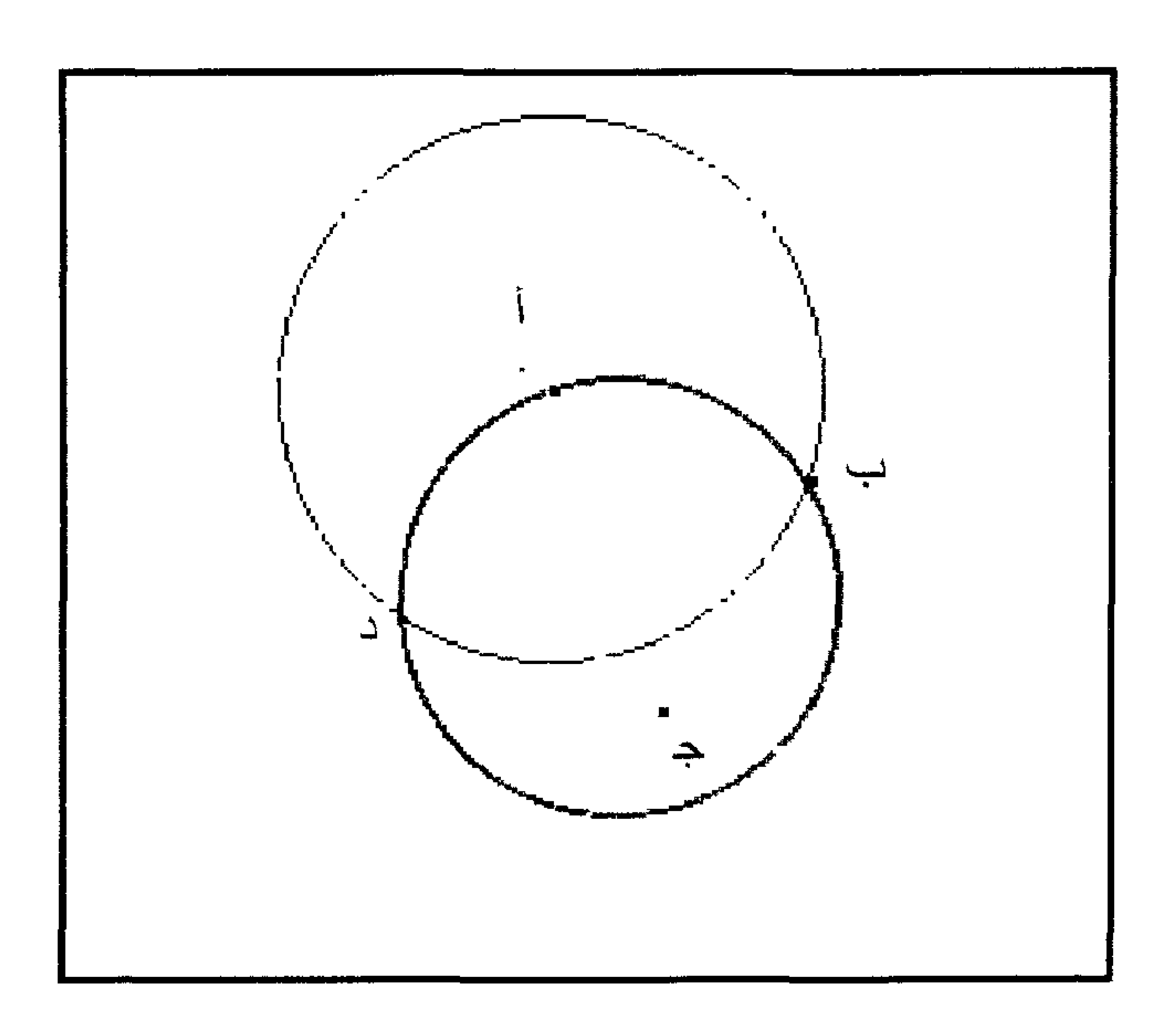
تخيل أن دائرة قد رسمت دون استخدام الفرجار (بواسطة إناء مثلا كالفنجان أو الصحن) وطلب منك تحديد مركزها. تلك هي مسألة نابليون بونابورت الذي كان يحسن فيما يبدو استخدام الفرجار. ويروى أن نابليون التقى بالرياضي الإيطالي مسكروني عام 1797 بإيطاليا. ولما عاد إلى فرنسا قدم نابليون عرضاً في أكاديمية العلوم الفرنسية حول أعمال مسكروني متبوعاً بحل شخصي لمسألة تحديد مركز الدائرة بالفرجار وحده. وقد اندهش الحاضرون حتى أن الرياضي الفرنسي الشهير بيير لابلاس (Laplace) (1749 – 1877) عقب قائلاً "حضرة الجنرال، كنا ننتظر منك كل شيء، عدا دروس في الهندسة".

**لنقدم خطوات حل هذه المسألة:**

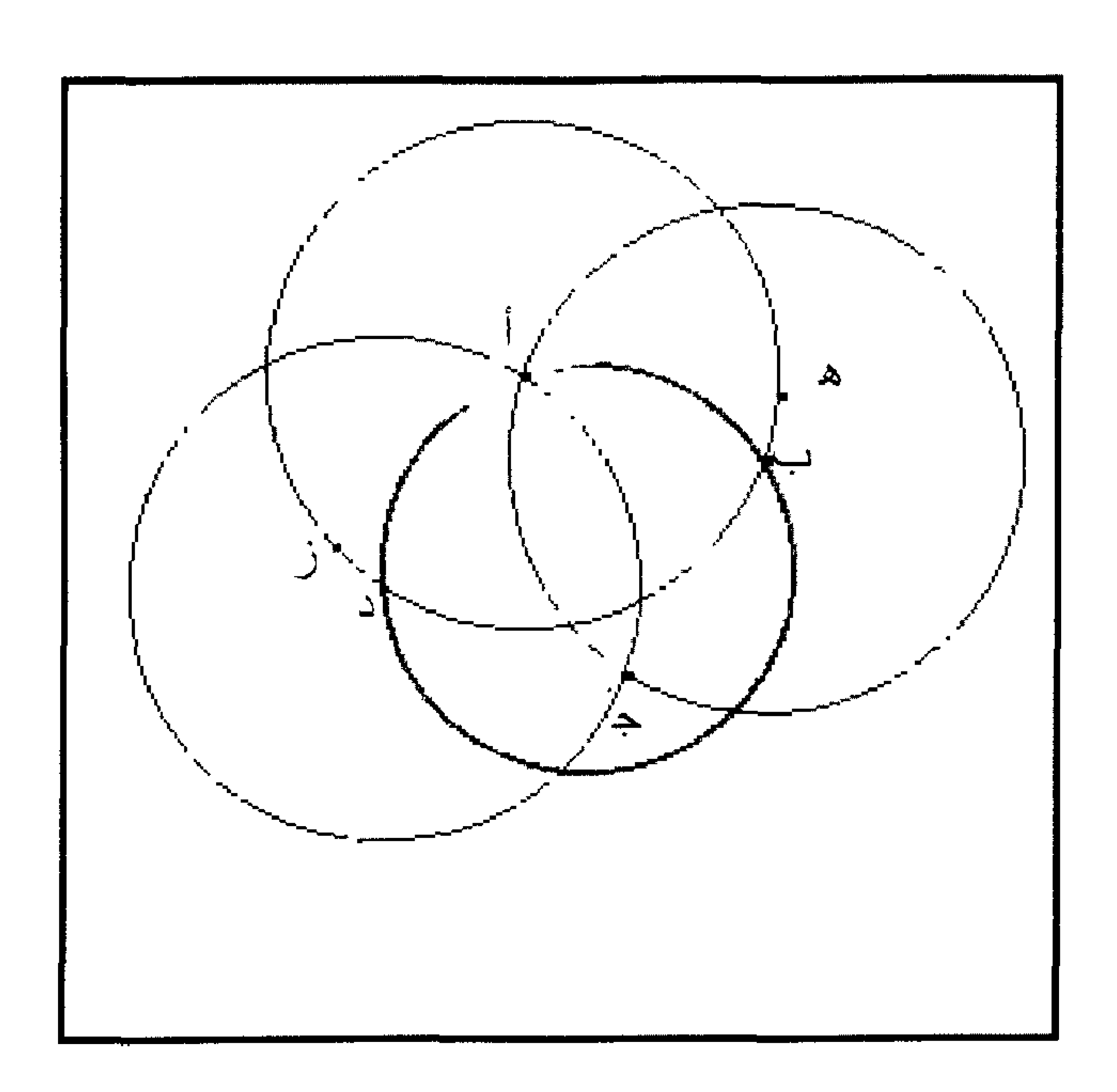
1. نختار نقطتين أ و ب على الدائرة م المطلوب مركزها بحيث لا يشكل أ ب قطراً لها. ثم نرسم الدائرة ن ذات المركز أ ونصف القطر أ ب فتقطع الدائرة م عند نقطة أخرى نرمز لها بـ د.



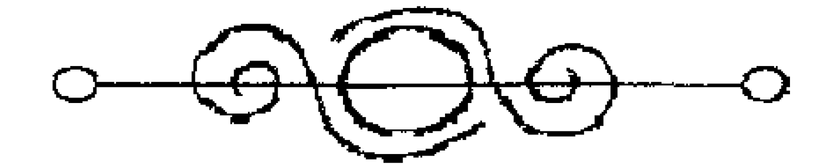
2. نرسم الدائرة ل (ذات المركز ب ونصف القطر (أ ب)) والدائرة ك (ذات المركز د ونصف القطر (أ د)) اللتين تلتقيان في نقطة أخرى نرمز إليها بـ جـ.




3. وبعد ذلك نرسم الدائرة و(ذات المركز جـ ونصف القطر أ جـ) فتقطع الدائرة ل عند هـ، ز.



4. وفي الأخير نرسم الدائرة ع (ذات المركز هـ ونصف القطر (أ هـ)) و الدائرة ح (ذات المركز ز ونصف القطر(أ ز)). هاتان الدائرتان تلتقيان في نقطتين هما أ ، ر مركز الدائرة م. أثبت ذلك.



### 4-5 أسئلة للمناقشة:

1) أنشئ بالفرجار فقط:

- النقطة نظيرة نقطة معلومة بالنسبة إلى مستقيم غير مرسوم يشمل نقطتين معلومتين.
- النقطة نظيرة نقطة معلومة بالنسبة إلى نقطة معلومة.
- نقطة جـ بحيث يكون المستقيمان آب و أجـ متعامدين.
- منتصف قطعة مستقيمة أب غير معلوم منها سوى النقطتين أ، ب (والمستقيم الواصل بين هاتين النقطتين غير مرسوم).

2) أنشئ بالمسطرة فقط:

- مستقيماً يشمل نقطة معلومة ويوازي مستقيماً معلوماً أب إذا علمت منتصف القطعة المستقيمة أب.
- نقطتي تقاطع دائرتين غير مرسومتين علم مركزاهما ونصفا قطريهما، علماً أن هناك دائرة مرسومة على الورقة.
- نقطة بحيث تكون المسافة بينها وبين نقطة معلومة تساوي طول القطعة المعلومة، إذا كان لديك مستقيماً معلوماً يشمل نقطة معلومة، ولديك قطعة مستقيمة أب. علماً أن هناك دائرة مرسومة على الورقة.

### 3) باستعمال المسطرة والفرجار:

- أنشئ مستقيماً يعامد مستقيماً معلوماً ل عند نقطة س لا تقع على ل.
- أنشئء 3 دوائر متماسة (من الخارج) أنصاف أقطارها معلومة.
- قسِم قطعة مستقيمة معطاة إلى عدد معلوم من المرات.

# الفصل الخامس

# التطابق، التشابه، التكافؤ

## 5– 1 التطابق

- تطابق القطع المستقيمة
- تطابق الزوايا
- تطابق الأشكال الهندسية
- حالات تطابق المثلثات

## 5 – 2 التشابه

- حالات تشابه المثلثات

## 5– 3 التكافؤ

## 5 – 4 أسئلة للمناقشة

# الفصل الخامس

# الفصل الخامس

# التطابق، التشابه، التكافؤ

## 5–1 التطابق:

هو صفة لشكلين هندسيين متفقين مقاساً وشكلاً، حيث إذا وضع أحدهما على الآخر فإن أجزاء الأول تقع تماماً على أجزاء الشكل الآخر.

فإذا كان ش$_1$، ش$_2$ شكلين متطابقين، يُكتب ذلك بالرموز ش$_1$ $\cong$ ش$_2$

### أولاً: تطابق القطع المستقيمة

تتطابق قطعتان مستقيمتان إذا كان لهما الطول نفسه، أي أن:

$\overline{\text{أ ب}} \cong \overline{\text{جـ د}}$ إذا وفقط إذا كان أ ب $=$ جـ د

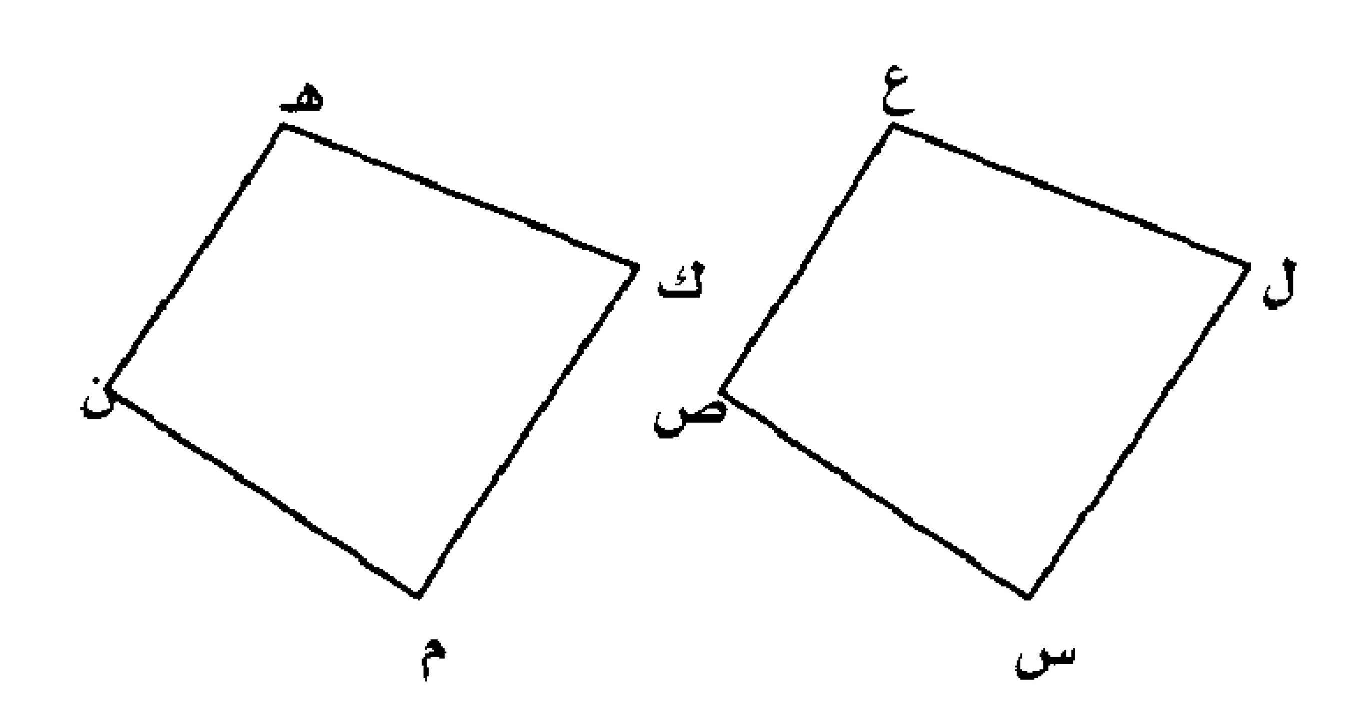
### ثانياً: تطابق الزوايا

تتطابق زاويتان إذا كان لهما القياس نفسه، أي أن:

$\measuredangle$ أ ب جـ $\cong$ $\measuredangle$ و د هـ إذا وفقط إذا كان ق $\measuredangle$ أ ب جـ = ق $\measuredangle$ و د هـ

### ثالثاً: تطابق الأشكال الهندسية

يتطابق مضلعان لهما العدد نفسه من الأضلاع إذا وفقط إذا تساوت قياسات زواياهما المتناظرة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة، لاحظ الشكلين.



كل منهما شكل رباعي، وبالنظر إلى ترتيب الأضلاع في كليهما نقول أن:

س ل يناظر ك هـ ∢ ع ل س تناظر ∢ هـ ك م

ل ع يناظر ك هـ ∢ ص ع ل تناظر ∢ ن هـ ك

ع ص يناظر هـ ن ∢ س ص ع تناظر ∢ م ن هـ

ص س يناظر ن م ∢ ل س ص تناظر ∢ ك م ن

قم بقياس أطوال الأضلاع المتناظرة وقياس الزوايا المتناظرة ستلاحظ أن الشكلين متطابقان.

وعندها نقول أن الشكل س ل ع ص ≅ م ك هـ ن

**مثال:** حدّد فيما إذا كان المثلثان متطابقين؟

**الحل:** لاحظ من الرسم أن:

∢ أ ≅ ∢ ز

وأن أ ب ≅ زح

∢ ب ≅ ∢ ح      ب ج ≅ ح هـ

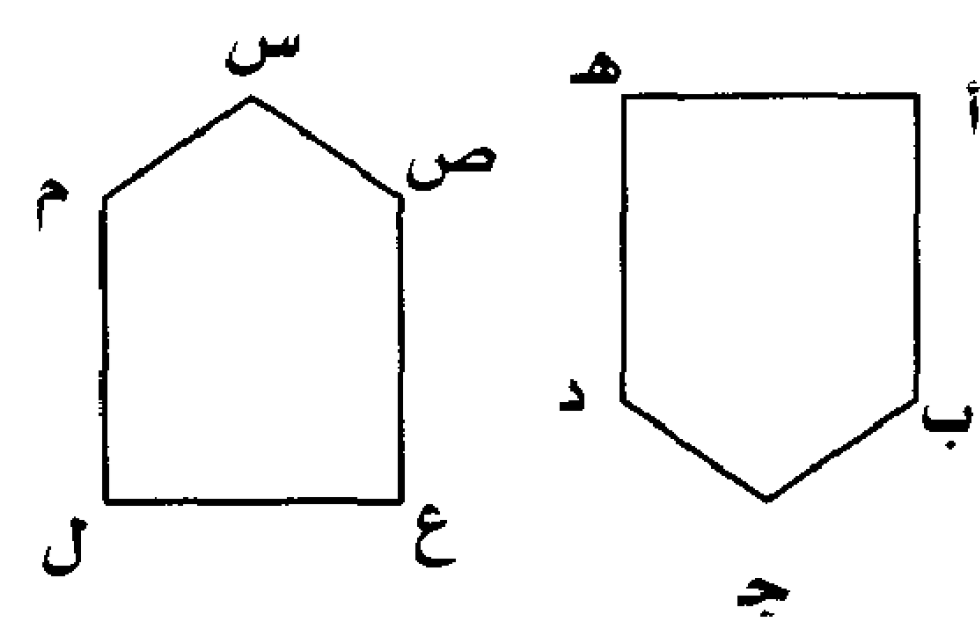
∢ جـ ≅ ∢ هـ      أ ج ≅ ز هـ

تُسمى الجمل السابقة بجمل التطابق.

ويمكن كتابة جمل التطابق دون الرجوع إلى الرسم، بتسمية المضلعين بترتيب الرؤوس المتناظرة للمضلعين بالترتيب نفسه.

أي أن: " أ ب جـ ≅ △ زح هـ

**تدريب:** الشكلان أ ب جـ د هـ، ع ص س م ل المجاوران متطابقان، اكتب جمل التطابق لهما.




وسنركّز في هذا الفصل على تطابق المثلثات، لأن كل مضلّع يمكن تجزئته إلى مجموعة من المثلثات.

**مثال:** هل المثلثان س ص ع، ز ح ط في الشكل المجاور متطابقان؟

**الحل:** معطى في كل من المثلثين قياسا زاويتين وضلع أي:

س ع ≅ ز ط لأن س ع = ز ط = 3سم

∡ س ≅ ∡ ز لأن ق ∡س = ق ∡ز = 81°

∡ ص ≅ ∡ ح لأن ق ∡ص = ق ∡ح = 25°

لاحظ أيضاً أن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

$$ق∢ع = 180° - (25° + 81°) = 74°$$

$$ق∢ط = 180° - (81° + 25°) = 74°$$

وهذا يعني أن قياسات الزوايا في كلا المثلثين متساوية، وبما أنه لا يوجد إلا مثلث واحد فقط يمكن رسمه بهذه القياسات، فإن المثلثين متطابقان، أي أن بقية العناصر المتناظرة متطابقة، ومنه:

$\overline{صع} \cong \overline{حط}$ ، $\overline{صس} \cong \overline{حز}$

أي أنه لا حاجة إلى معرفة جميع قياسات المثلثين (عناصرهما الستة) للحكم على تطابقهما.

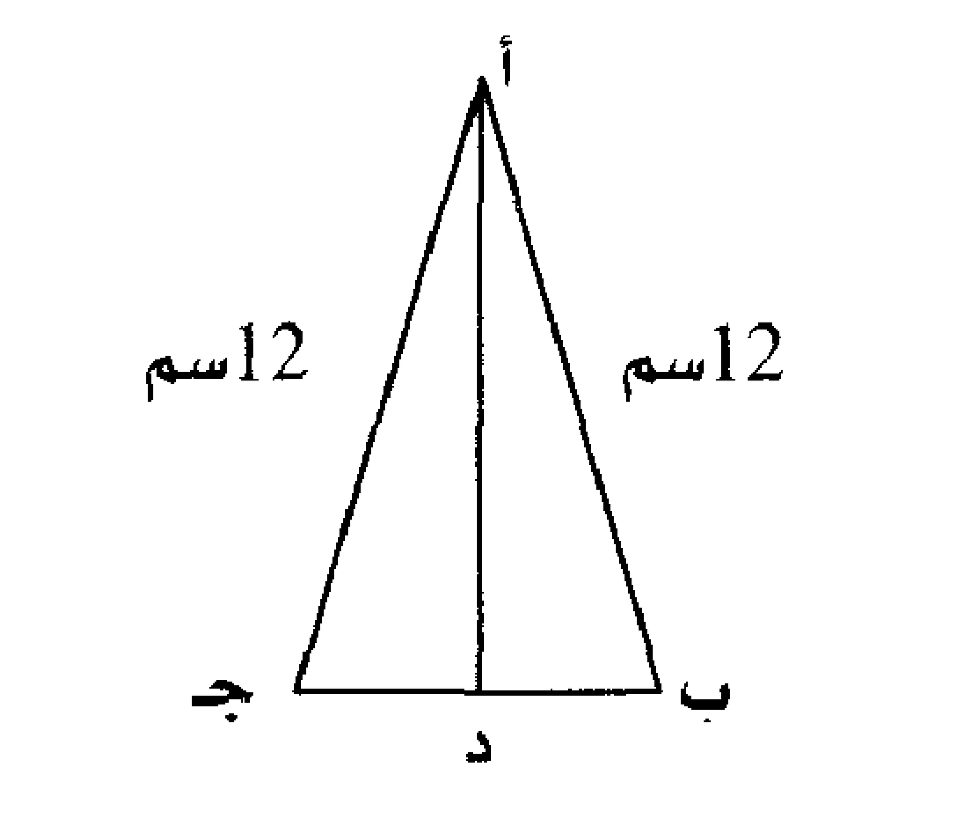
**حالات تطابق المثلثات:**

1) ينطبق المثلثان إذا ساوى في أحدهما طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما نظائرهما في الآخر (ض ز ض)

**مثال:** أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه $\overline{أب} = \overline{أجـ} = 12$ سم، $\overline{أد}$ تنصّف زاوية الرأس (أ)، د ∈ ب ج

أثبت أن:

1. $\overline{أد}$ ينصف $\overline{بجـ}$
2. $\overline{أد} \perp \overline{بجـ}$
3. ∢ب ≅ ∢جـ




الحل: △△ أ ب د، أ جـ د فيهما:

أ ب ≅ أ جـ (كلاً منهما = 12 سم)

أ د مشترك

∢ ب أ د ≅ ∢ جـ أ د (معطى)

∴ يتطابق المثلثان بضلعين وزاوية محصورة بينهما، وينتج أن:

ب د ≅ جـ د أي أن أ د ينصّف أ جـ

∢ ب ≅ ∢ جـ

∢ ب أ د ≅ ∢ جـ أ د وهما على خط مستقيم

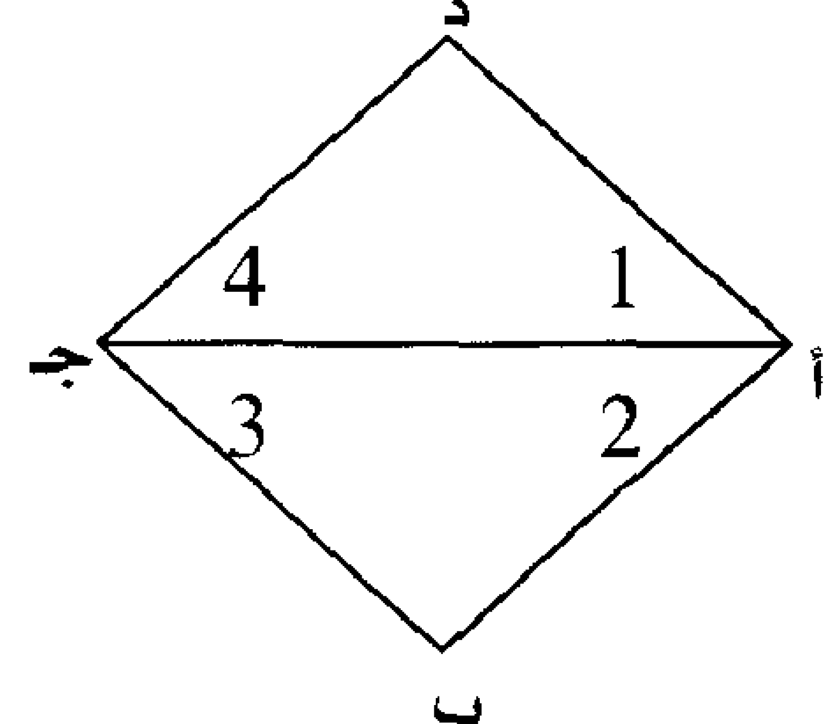
∴ ق ∢ ب أ د = ق ∢ جـ أ د = 90°

∴ أ د ⊥ ب جـ

بناء على المثال السابق، يمكن وضع نص النظرية التالي:

نظرية: في المثلث المتطابق الضلعين، زوايا القاعدة متطابقة، والعمود النازل من الرأس على القاعدة ينصف القاعدة. (أثبت ذلك).

2) يتطابق المثلثان إذا ساوى طول كل ضلع من أحدهما طول نظيره من المثلث الآخر. (ض ض ض)




**مثال:** أ ب جـ د معيّن، رسم قطره أ جـ ، أثبت أن:

1. ∢ ب ≅ ∢ جـ
2. أ جـ تنصّف الزاويتين اللتين تصل بين رأسيهما.

**الحل:** في المثلثين أ ب جـ، أ د جـ

$\overline{\text{أ ب}}$ ≅ $\overline{\text{أ د}}$ (خصائص المعيّن)

$\overline{\text{ب جـ}}$ ≅ $\overline{\text{جـ د}}$ (خصائص المعيّن)

$\overline{\text{أ جـ}}$ مشترك

∴ يتطابق المثلثان بثلاثة أضلاع، وينتج أن:

∢ ب ≅ ∢ د      المطلوب الأول

∢ 2 ≅ ∢ 1

∢ 3 ≅ ∢ 4

أي أن أ جـ ينصّف كلاً من ∢ أ، ∢ جـ.

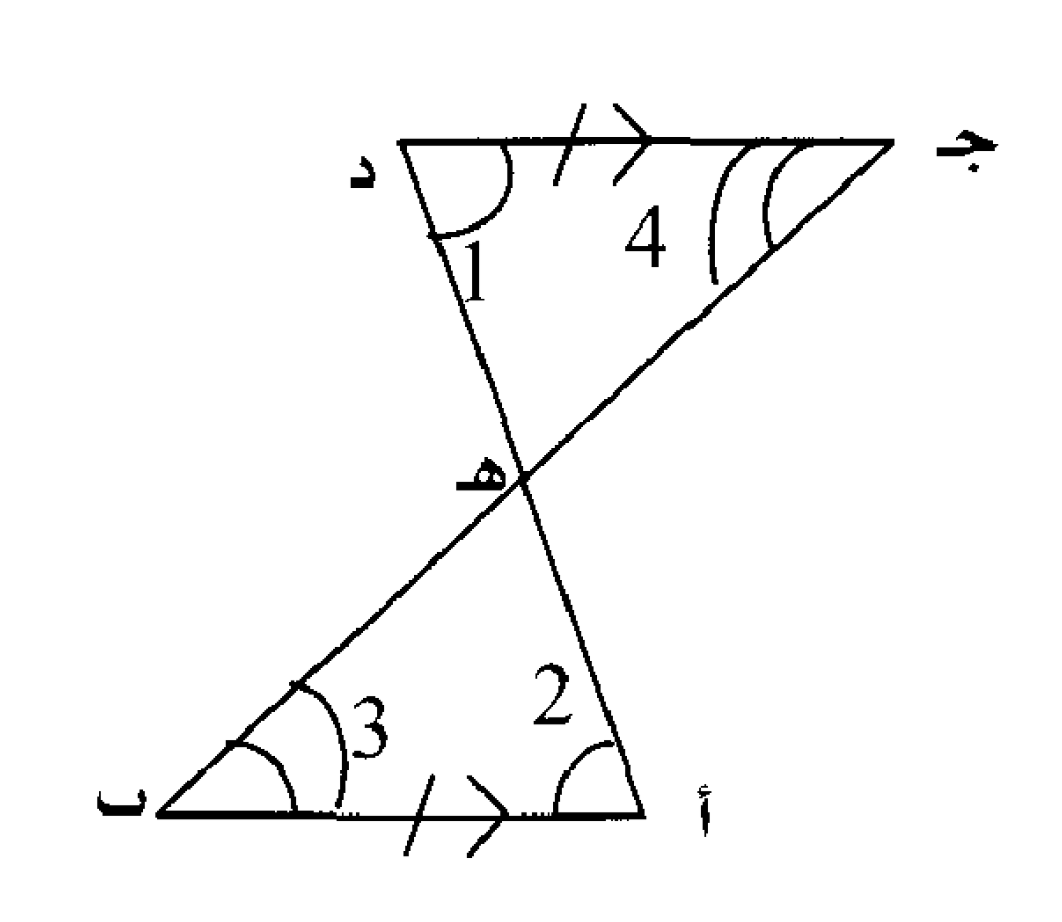
**تدريب:** كيف يمكنك ترتيب (6) أعواد ثقاب لتشكيل أربعة مثلثات متطابقة، كل منها ضلع في مثلث.

3) يتطابق المثلثان إذا ساوى في أحدهما قياس زاويتين وطول ضلع نظائرهما في الآخر (ليس بالضرورة الضلع الواصل بين رأسي الزاويتين) (ز ض ز)

**مثال:** $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ قطعتان مستقيمتان متوازيتان ومتطابقتان،

$\overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ تتقاطعان في هـ، أثبت أن:

1. $\overline{\text{أ هـ}} \cong \overline{\text{د هـ}}$
2. $\overline{\text{ب هـ}} \cong \overline{\text{جـ هـ}}$




**الحل:** في المثلثين هـ أ ب، هـ د جـ

$\measuredangle 2 \cong \measuredangle 1$ (بالتبادل)

$\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$ (بالتبادل)

$\overline{\text{أ ب}} \cong \overline{\text{جـ د}}$ (معطى)

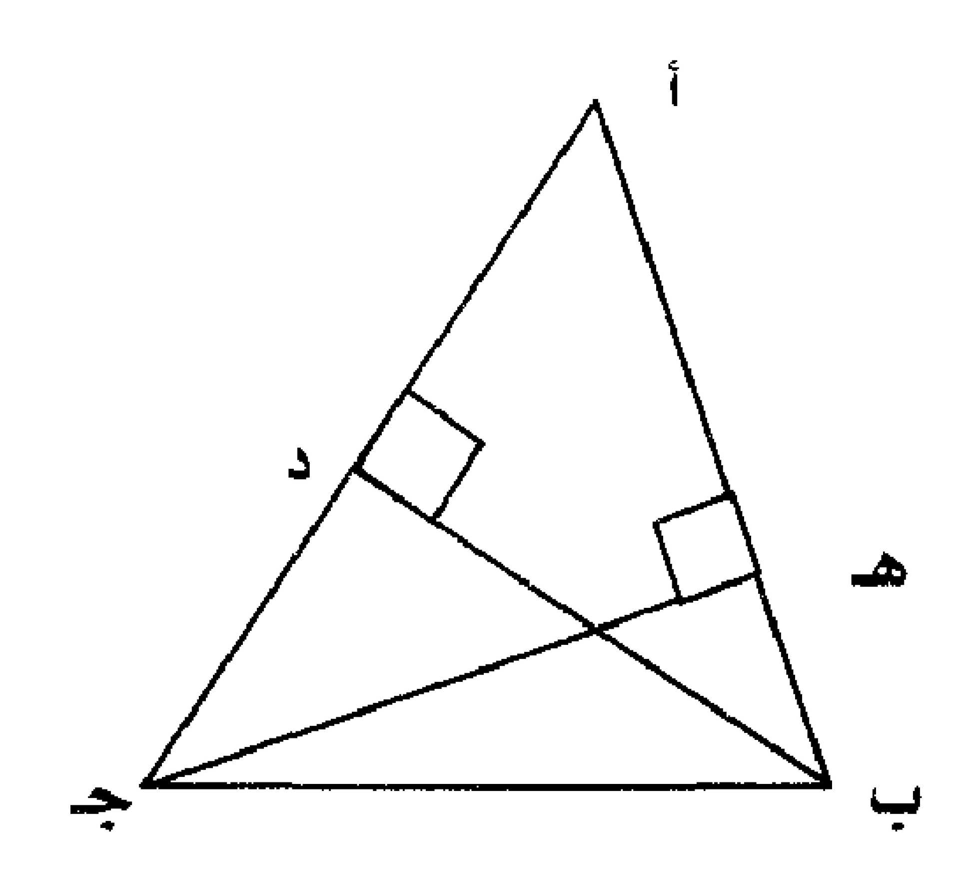
$\therefore$ يتطابق المثلثان بزاويتين وضلع، وينتج أن:

$\overline{\text{أ هـ}} \cong \overline{\text{هـ د}}$ المطلوب الأول

$\overline{\text{ب هـ}} \cong \overline{\text{جـ هـ}}$ المطلوب الثاني

**حالة خاصة في تطابق المثلثات قائمة الزاوية:**

ينطبق المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى وتر وضلع في أحدهما نظيراهما في الآخر أو إذا ساوى ضلع وزاوية حادّة في أحدهما نظيراتها في الآخر.




**مثال:** أ ب جـ د مثلث، أُنزلت الأعمدة $\overline{\text{ب د}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ من الرؤوس ب، جـ على الأضلاع المقابلة لها. إذا كان:

$\overline{\text{ب د}}$ ≅ $\overline{\text{جـ هـ}}$ أثبت أن: ∢ ب ≅ ∢ جـ

**الحل:** المثلثان ب د جـ، جـ هـ ب فيهما:

∢ هـ ≅ ∢ د (قوائم)

$\overline{\text{جـ هـ}}$ ≅ $\overline{\text{ب د}}$ (معطى)

$\overline{\text{ب جـ}}$ مشترك

∴ يتطابق المثلثان القائما الزاوية بضلع ووتر وينتج أن:

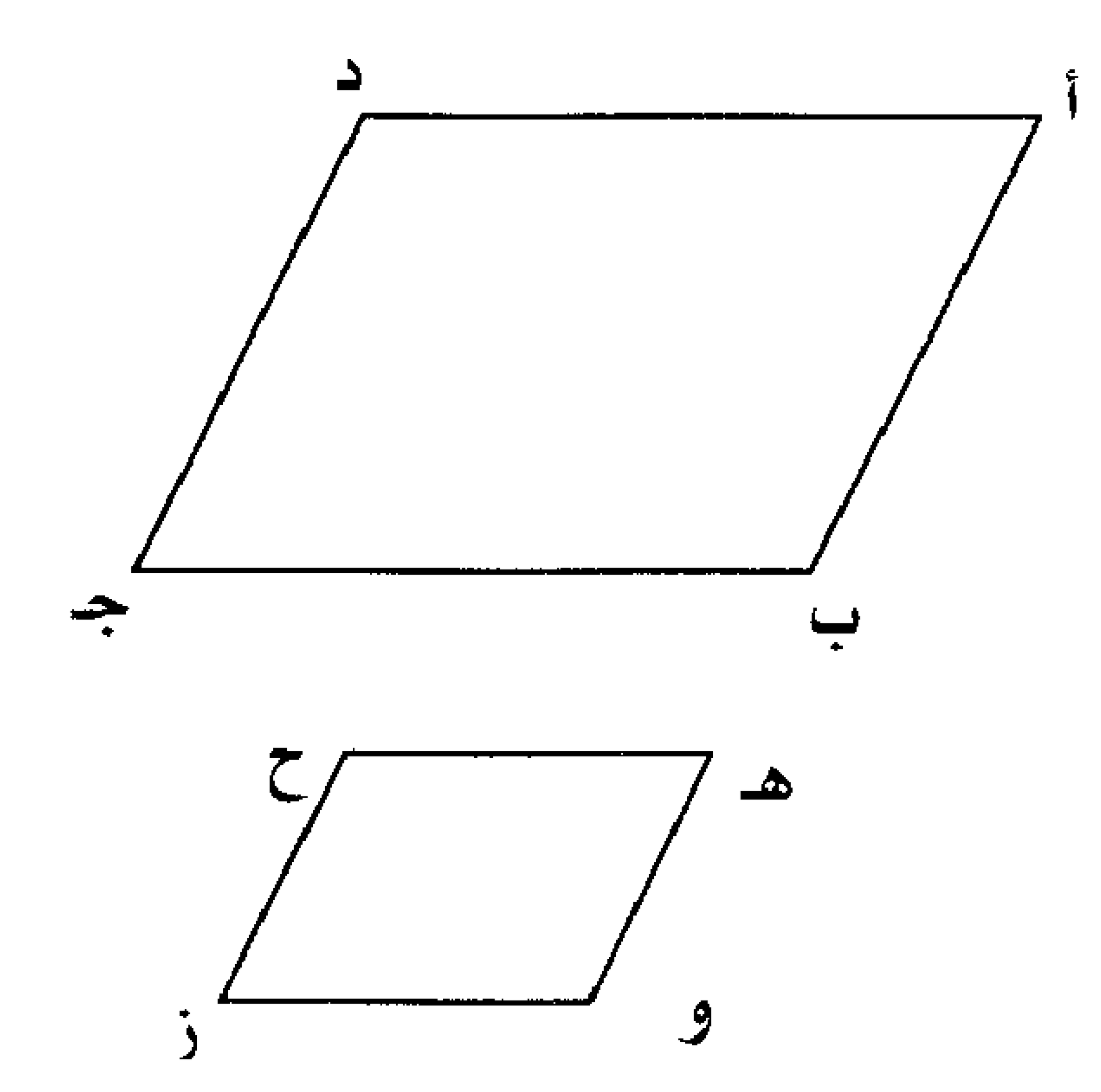
∢ هـ ب جـ ≅ ∢ د جـ ب

**تدريب:** برهن أن قياس كل زاوية من زوايا المثلث متطابق الأضلاع يساوي $60^\circ$.

## 5-2 التشابه:

إن المهندس الذي يضع تصميم عمارة، أو مخطّط قطعة أرض، أو رسم آلة على ورقة، فإنّه يضع رسماً يشبه الشكل الحقيقي. وفي الهندسة، تسمّى الأشكال ذات المظهر المتماثل، والتي قد تختلف في حجومها أشكالاً متشابهة.

فمثلاً متوازيا الأضلاع أ ب جـ د، هـ و ز ح متشابهان، حيث:




∡ أ ≅ ∡ هـ

∡ ب ≅ ∡ و

∡ جـ ≅ ∡ ز

∡ د ≅ ∡ ح

وكذلك النسب بين الأضلاع المتناظرة متساوية:

أي أن : $\frac{\text{أ ب}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{و ز}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ز ح}} = \frac{\text{د أ}}{\text{ح هـ}} = \frac{2}{1}$

إن زوايا متوازي الأضلاع المتناظرة متطابقة، وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة، ويعبّر بالرموز عن تشابه المتوازيين أعلاه كما يلي:

▱ أ ب جـ د ~ ▱ هـ و ز ح

**تعريف:**

يتشابه مضلّعان لهما العدد نفسه من الأضلاع إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة، ويرمز للتشابه بالرمز " ~".

- الترتيب الذي تظهر فيه رؤوس مضلعين متشابهين يدلّ على الأضلاع المتناظرة والزوايا المتناظرة، فمثلاً إذا كان:

Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و فهذا يعني أن:

∡ أ ≅ ∡ د، ∡ ب ≅ ∡ هـ ، ∡ جـ ≅ ∡ و

وكذلك فإن أ ب تناظر د هـ ، ب جـ تناظر هـ و ، جـ أ تناظر و د.

مثال: في الشكل المجاور، إذا كان:

س ص ع ل ~ أ ب جـ د، فعيّن:

1. الأضلاع المتناظرة
2. قيمة كل من س ص، ع ل، أ د

ع ، ل ، ص ، س
15 سم
12 سم
جـ ، ب ، أ
8 سم
10 سم
12 سم

الحل:

1. الأضلاع المتناظرة:

الضلع س ص يناظر الضلع أ ب

الضلع ص ع يناظر الضلع ب جـ

الضلع ع ل يناظر الضلع جـ د

الضلع ل س يناظر الضلع د آ

2. من التشابه:

$$\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ع ل}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{ل س}}{\text{أ د}}$$

ومنه:

$$\frac{\text{س ص}}{12} = \frac{15}{10} = \frac{\text{ع ل}}{8} = \frac{12}{\text{د أ}}$$

أي أن:

$$\frac{\text{س ص}}{12} = \frac{15}{10} \text{ ومنه س ص } = \frac{15 \times 12}{10} = 18 \text{ سم}$$

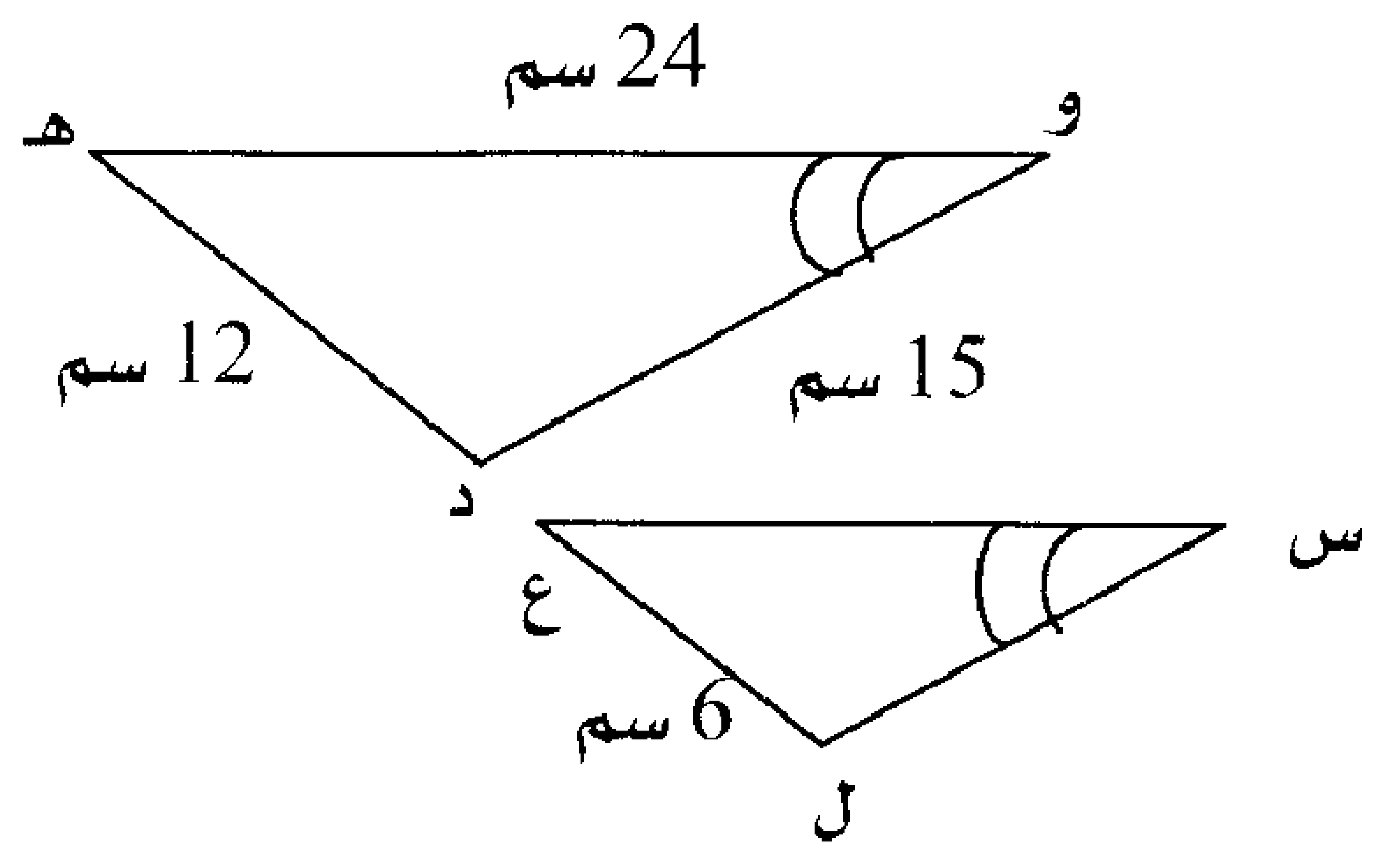
وكذلك:

$$\frac{15}{10} = \frac{\text{ع ل}}{8} \text{ ومنه ع ل } = \frac{15 \times 8}{10} = 12 \text{ سم}$$

وكذلك:

$$\frac{15}{10} = \frac{12}{\text{د أ}} \text{ ومنه د أ } = \frac{12 \times 10}{15} = 8 \text{ سم}$$

**تدريب:** إذا كان المثلثان في الشكل المجاور متشابهين، فجد ما يلي:




1. طول كل من س ل، ل ع
2. النسبة بين كل ضلعين متناظرين.
3. نسبة محيط Δ س ل ع : محيط Δ و د هـ

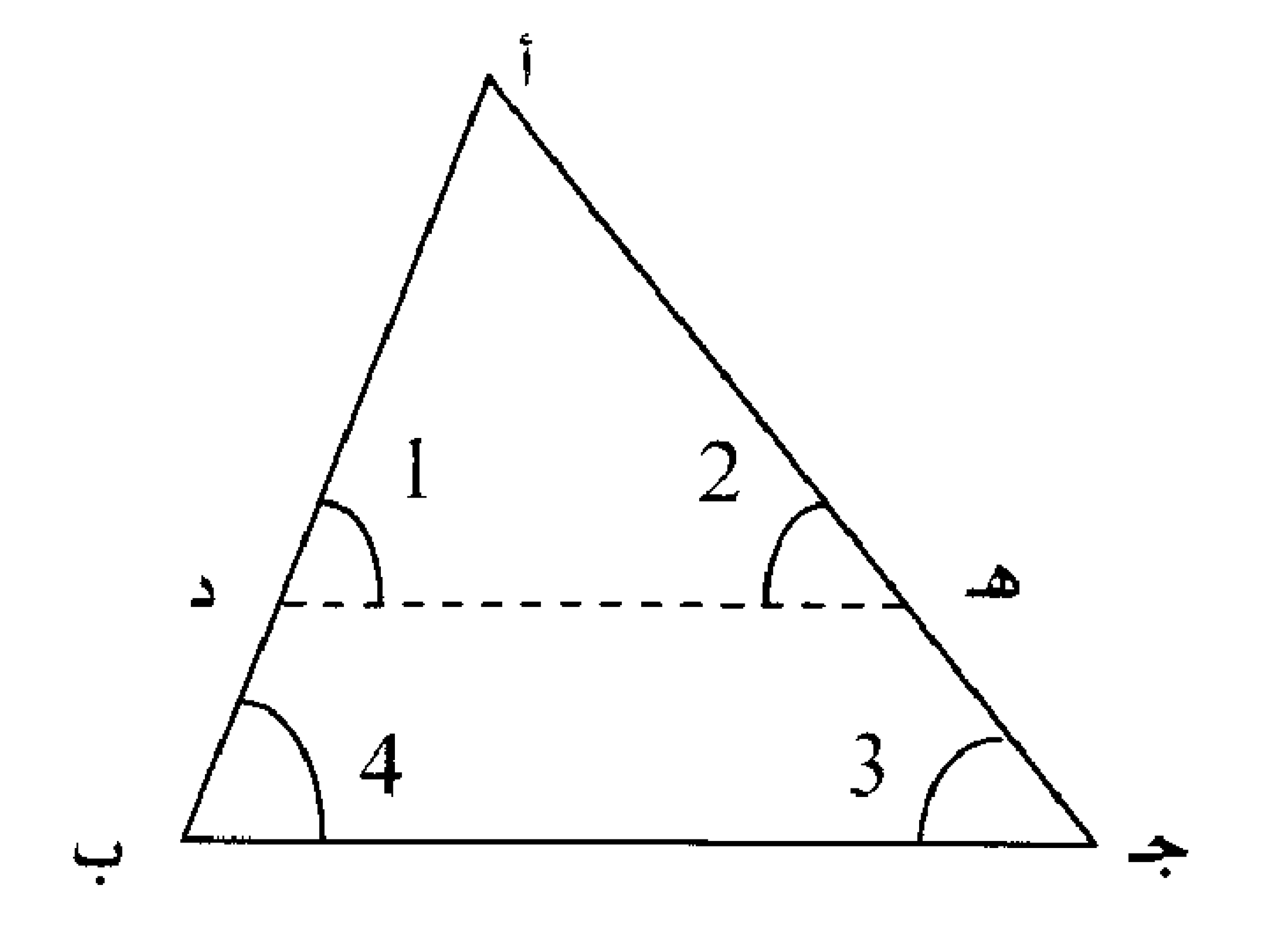
**حالات تشابه المثلثات:**

**1)** يتشابه مثلثان إذا طابقت زاويتان في أحدهما الزاويتين المناظرتين لهما في الآخر (ز ز)

**مثال:** في الشكل المجاور، إذا علمت أن د هـ // ب جـ

أ د = 3 سم، د ب = 1 سم، هـ جـ = 1.2 سم.

أثبت أن: أ هـ = 3.6 سم




**الحل:** بما أن د هـ // ب جـ، فإن:

$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 4$ (بالتناظر)

$\measuredangle 2 \cong \measuredangle 3$ (بالتناظر)

وعليه فإن Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ

وينتج أن : $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$

$\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ هـ} + 1.2} = \frac{3}{4}$ لاحظ أن أ جـ = أ هـ + هـ جـ = أ هـ + 1.2 سم

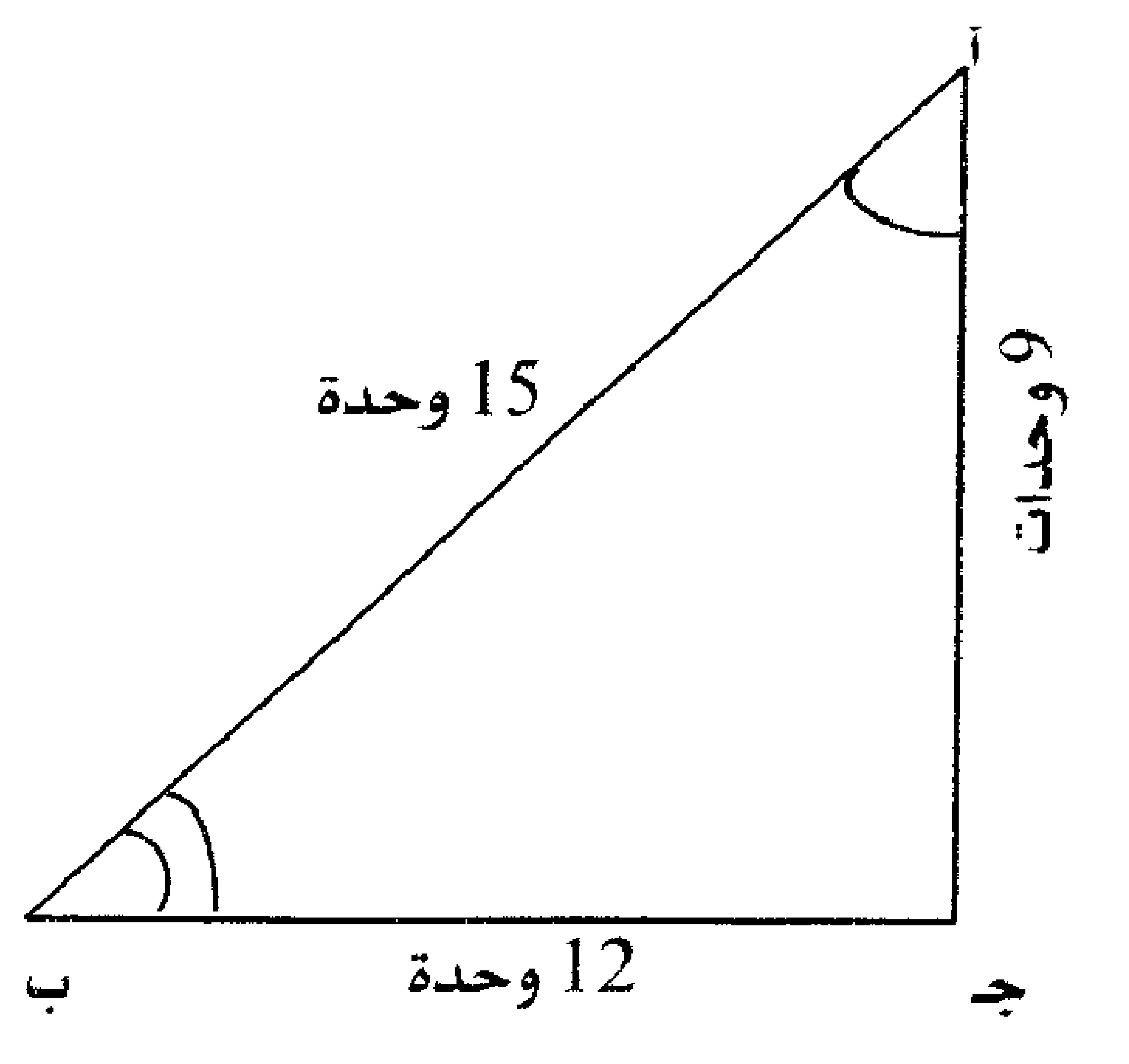
كما أن أ ب = أ د + د ب = 3 + 1 = 4 سم ⟸

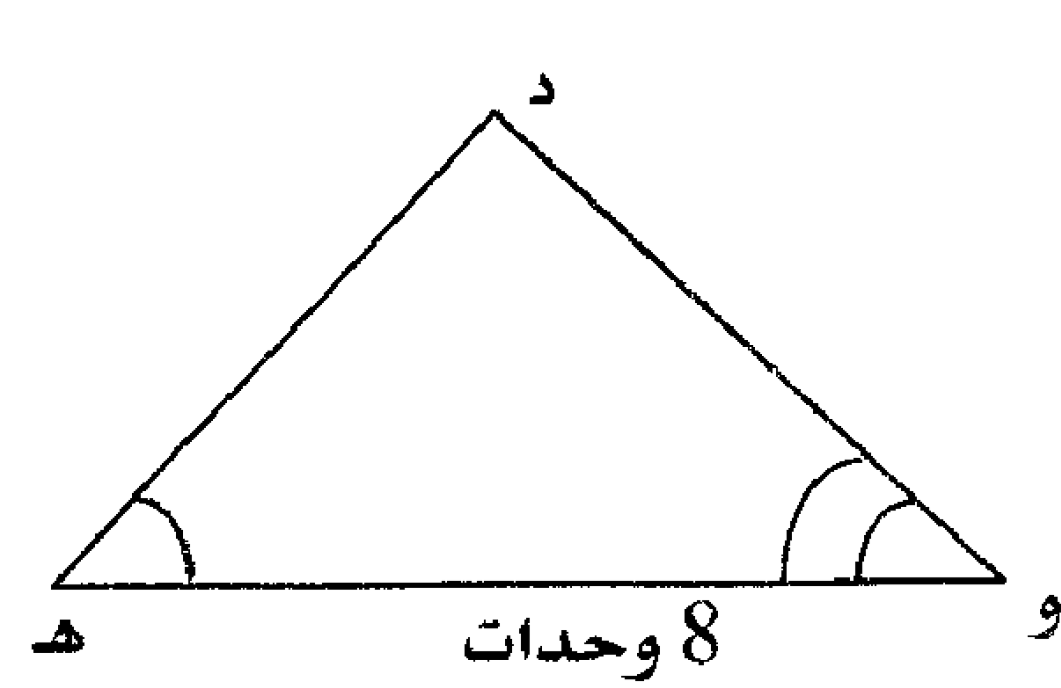
∴ 4 أ هـ = 3 أ هـ + 3.6

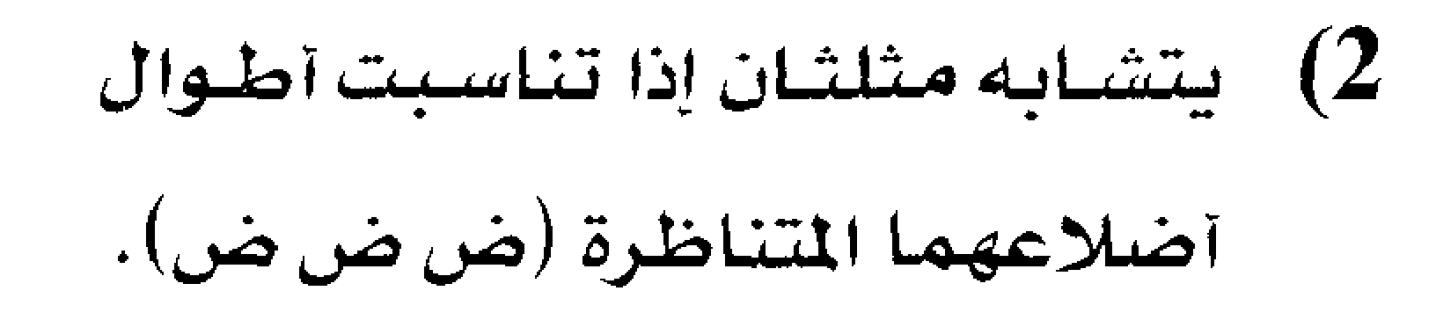
∴ أ هـ = 3.6 سم وهو المطلوب

تدريب: في الشكل المجاور، إذا علمت أن ∡ أ ≅ ∡ هـ ، ∡ ب ≅ ∡ و ، أثبت أن

Δ أ ب جـ ~ Δ هـ د و، ثم احسب طولي د هـ ، د و





**2)** يتشابه مثلثان إذا تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة (ض ض ض).



**المعطيات:** أ ب جـ، د هـ و مثلثان فيهما:

$$\frac{\text{د هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{د و}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{ب جـ}} \quad \ldots\ldots (1)$$

**المطلوب:** إثبات أن $\Delta$ د هـ و $\sim$ $\Delta$ أ ب جـ



**البرهان:** نأخذ نقطة س على أ ب بحيث أن:

$\overline{\text{أ س}} \cong \overline{\text{د هـ}}$ ونرسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ وتقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ في ص.

فتكون $\measuredangle$ أ س ص $\cong$ $\measuredangle$ أ ب جـ (بالتناظر)

$\therefore$ $\Delta$ أ س ص $\sim$ $\Delta$ أ ب جـ ومنه:

$$\frac{\text{أ س}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}}$$ وبتعويض أ س = د هـ ينتج :

$$\frac{\text{د هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و(2) ينتج أن:

$$\frac{\text{د و}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}}$$ ومنها د و = أ ص

وكذلك $\frac{\text{هـ و}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}}$ ومنها هـ و = س ص

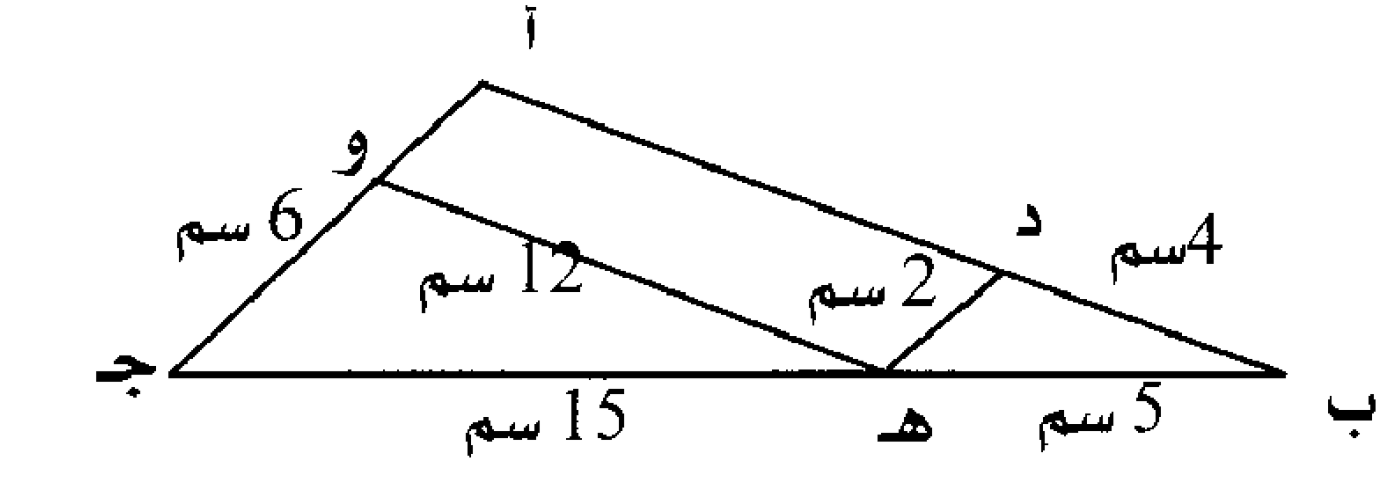
أي أن Δ د هـ و ≅ Δ أ ب جـ وينتج أن:

∢ د ≅ ∢ أ

∢ هـ ≅ ∢ أ س ص ≅ ∢ أ ب جـ

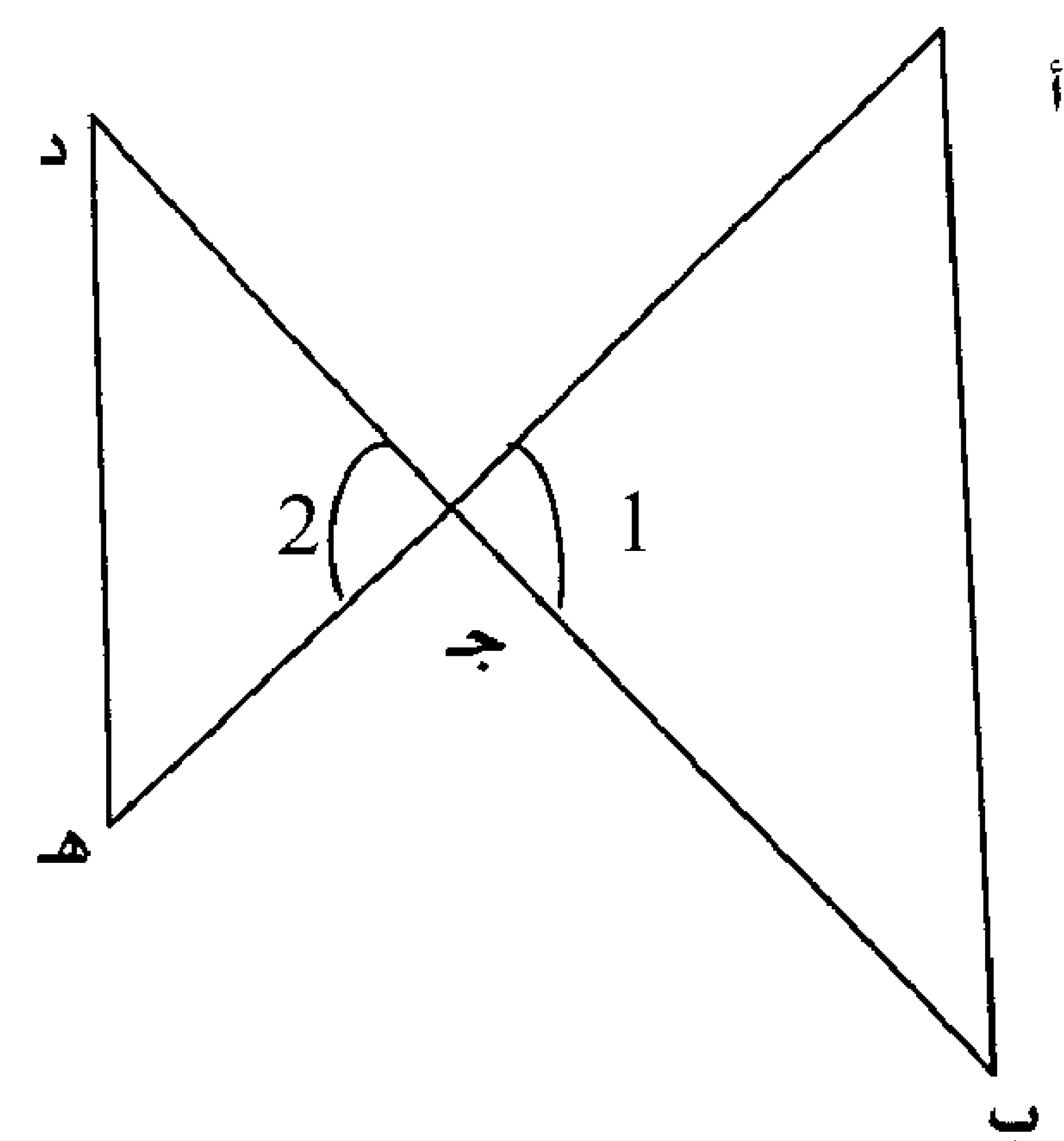
∴ Δ د هـ و ~ Δ أ ب جـ (حالة ز ز)

**نتيجة:** إذا رسمت قطعة مستقيمة تصل بين ضلعين في مثلث وتوازي الضلع الثالث، فإن المثلثين الناتجين متشابهان.




**تدريب:** أثبت أن أ د هـ و متوازي أضلاع

3) إذا تناسب طولا ضلعين في مثلث مع طولي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر، وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول تطابق الزاوية المناظرة لها في المثلث الثاني، فإن المثلثين متشابهان.
(ض ز ض).




**مثال:** في الشكل المجاور، إذا علمت أن:

جـ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ

جـ هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ

أثبت أن $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$

**الحل:** بما أن جـ هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ $\Leftarrow$ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}} = 2$ ....... (1)

كذلك: د جـ = $\frac{1}{2}$ جـ ب $\Leftarrow$ $\frac{\text{جـ ب}}{\text{د جـ}} = 2$ .......(2)

من (1) و (2) ينتج أن:

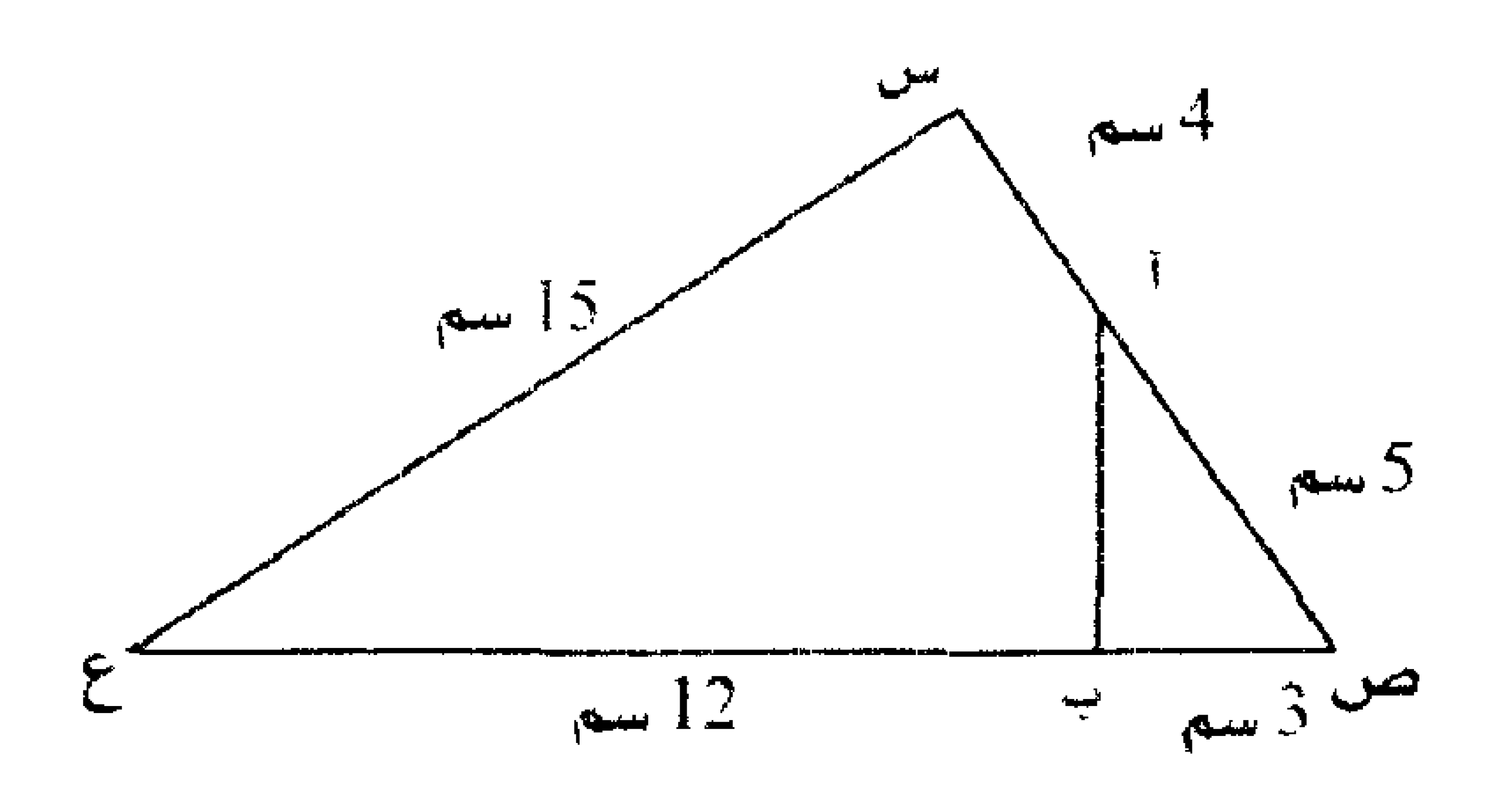
$$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{د جـ}} \quad .......... (3)$$

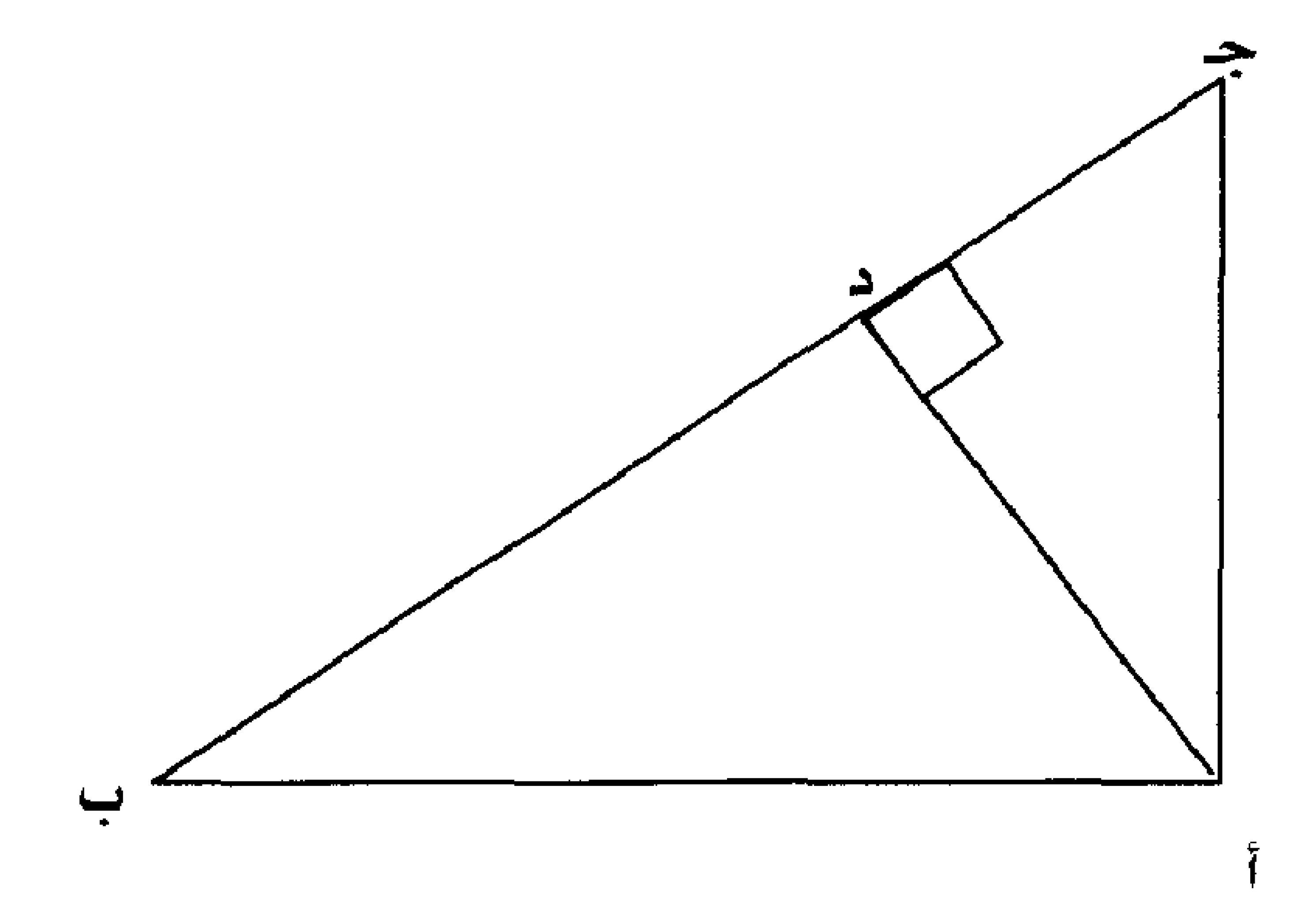
وبما أن $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ (التقابل بالرأس).......... (4)

من (3) و (4) ينتج أن:

$\Delta$ أ ب جـ ~ $\Delta$ هـ د جـ

**تدريب:** جد طول أ ب في الشكل التالي:






**مثال:** إذا كان أ ب جـ مثلثاً قائم الزاوية في أ وكان $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ فإن:

1. $(\text{أب})^2 = \text{ب د} \times \text{ب جـ}$
2. $(\text{أ جـ})^2 = \text{جـ د} \times \text{جـ ب}$

**البرهان:** المثلثان أ ب جـ ، د ب أ فيهما:

∢ ب أ جـ ≅ ∢ ب د أ (قوائم)

∢ أ ب جـ ≅ ∢ د ب أ (مشتركة)

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ د ب أ (حالة ز ز) وينتج أن:

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{د ب}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{أ د}}$$ ومنه :

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{د ب}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب أ}}$$ ومنه :

$(\text{أ ب})^2 = \text{د ب} \times \text{ب جـ}$ وهو المطلوب الأول.

في المثلثين أ ب جـ، د أ جـ

∢ جـ أ ب ≅ ∢ أ د جـ (قوائم)

∢ أ جـ د ≅ ∢ د جـ أ (مشتركة)

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ د أ جـ (حالة ز ز) وينتج أن:

$\frac{\text{أ ب}}{\text{د أ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ د}}$ ومنه :

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ د}} \Leftarrow$ ومنه $(\text{أ جـ})^2 = \text{جـ د} \times \text{ب جـ}$ وهو المطلوب الثاني

**يمكن صياغة النظرية على الصورة التالية:**

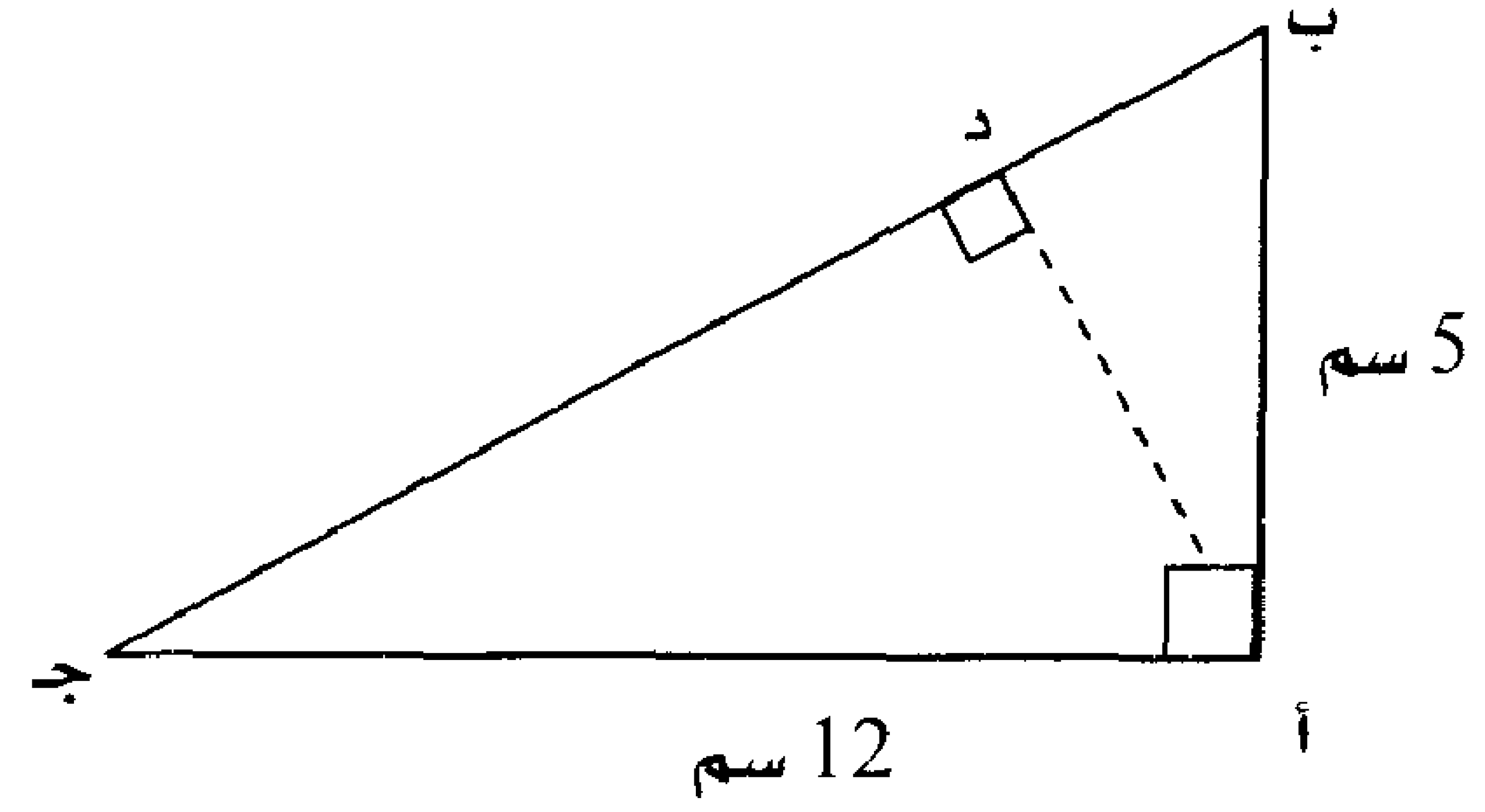
**"في المثلث القائم الزاوية يشكّل العمود النازل على الوتر من الرأس القائم مثلثين متشابهين ويشبهان المثلث الأصلي".**

**يمكن استخدام النظرية أعلاه في إثبات نظرية فيثاغورس.**

**نظرية فيثاغورس: في المثلث القائم الزاوية، مربع الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.**

**أثبت ذلك.**

**مثال: في المثلث أ ب جـ، ∢ جـ أ ب قائمة، أ د ⊥ ب جـ، أوجد طول كل من: ب د ، ج د ، أ د**




**الحل: بما أن أ ب جـ مثلث قائم الزاوية، فإن:**

$(\text{ب جـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{أ جـ})^2$ **(نظرية فيثاغورس)**

$= (5)^2 + (12)^2$

$= 25 + 144$

$= 169$

ب جـ $= \sqrt{169} = 13$ سم

وبما أن $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ في المثلث القائم ب أ جـ فإن:

$(\text{أ ب})^2 =$ ب د × ب جـ

$\therefore (5)^2 =$ ب د × 13 ومنه ب د $= \frac{25}{13}$ سم

بالمثل $(\text{أ جـ})^2 =$ جـ د × ب جـ

$(12)^2 =$ جـ د × 13

جـ د $= \frac{144}{13}$ سم

وكذلك $(\text{أ د})^2 =$ ب د × جـ د

$= \frac{25}{13} \times \frac{144}{13}$

$\therefore$ أ د $= \frac{60}{13}$ سم.

## 5-3 التكافؤ:

تتحدد مساحة الشكل بالخطوط التي تحيطه، ويكون الشكلان متكافئين إذا تساويا في مساحتيهما، ويرمز للتكافؤ بالرمز " ≡ "

**مثال:** أ ب جـ د مربع فيه أ ب = 4 سم ، س ص ع ل مستطيل فيه

س ص = 8 سم، ص ع = 2 سم، هل الشكلان متكافئان؟

**الحل:** مساحة المربع أ ب جـ د = $(4)^2$ = 16 سم$^2$

مساحة المستطيل س ص ل ع = 8×2 = 16 سم$^2$

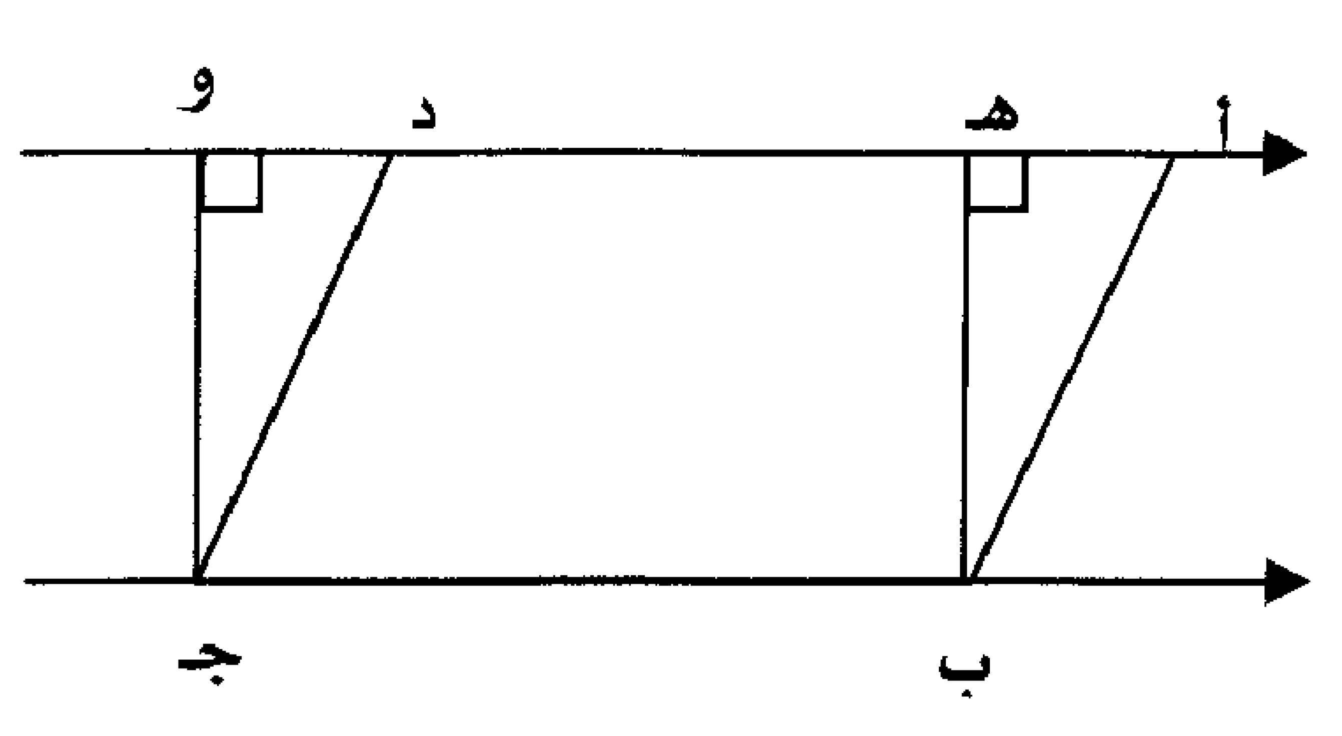
بما أن مساحة المربع أ ب جـ د = مساحة المستطيل س ص ل ع فإن الشكلين متكافئان.

**تدريب:**

1. إذا تطابق مثلثان، فهل لهما المساحة نفسها؟ لماذا؟

2. هل جميع المثلثات التي لها المساحة نفسها متطابقة؟ لماذا؟

**مثال:** أثبت أن متوازي الأضلاع يكافئ المستطيل المتحد معه في القاعدة والمحصور معه بين مستقيمين متوازيين.




**المعطيات:** أ ب جـ د متوازي أضلاع قاعدته $\overline{\text{ب جـ}}$

هـ ب جـ و مستطيل يشترك معه في القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$

وينحصر معه بين المستقيمين و أ ، ب جـ

المطلوب: إثبات أن متوازي الأضلاع أ ب جـ د يكافئ المستطيل هـ ب جـ و

البرهان: في المثلثين القائمي الزاوية أ ب هـ، د جـ و فيهما:

أ ب ≅ جـ د (خصائص متوازي الأضلاع)

ب هـ ≅ جـ و (خصائص المستطيل)

ينطبق المثلثان بضلع ووتر وينتج أن:

مساحة $\Delta$ أ ب هـ = مساحة $\Delta$ د جـ و

مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د = مساحة $\Delta$ أ ب هـ + مساحة شبه المنحرف هـ ب جـ د

= مساحة $\Delta$ د جـ و + مساحة شبه المنحرف هـ ب جـ د

= مساحة المستطيل هـ ب جـ و

أي أن متوازي الأضلاع أ ب جـ د والمستطيل هـ ب جـ و متكافئان.

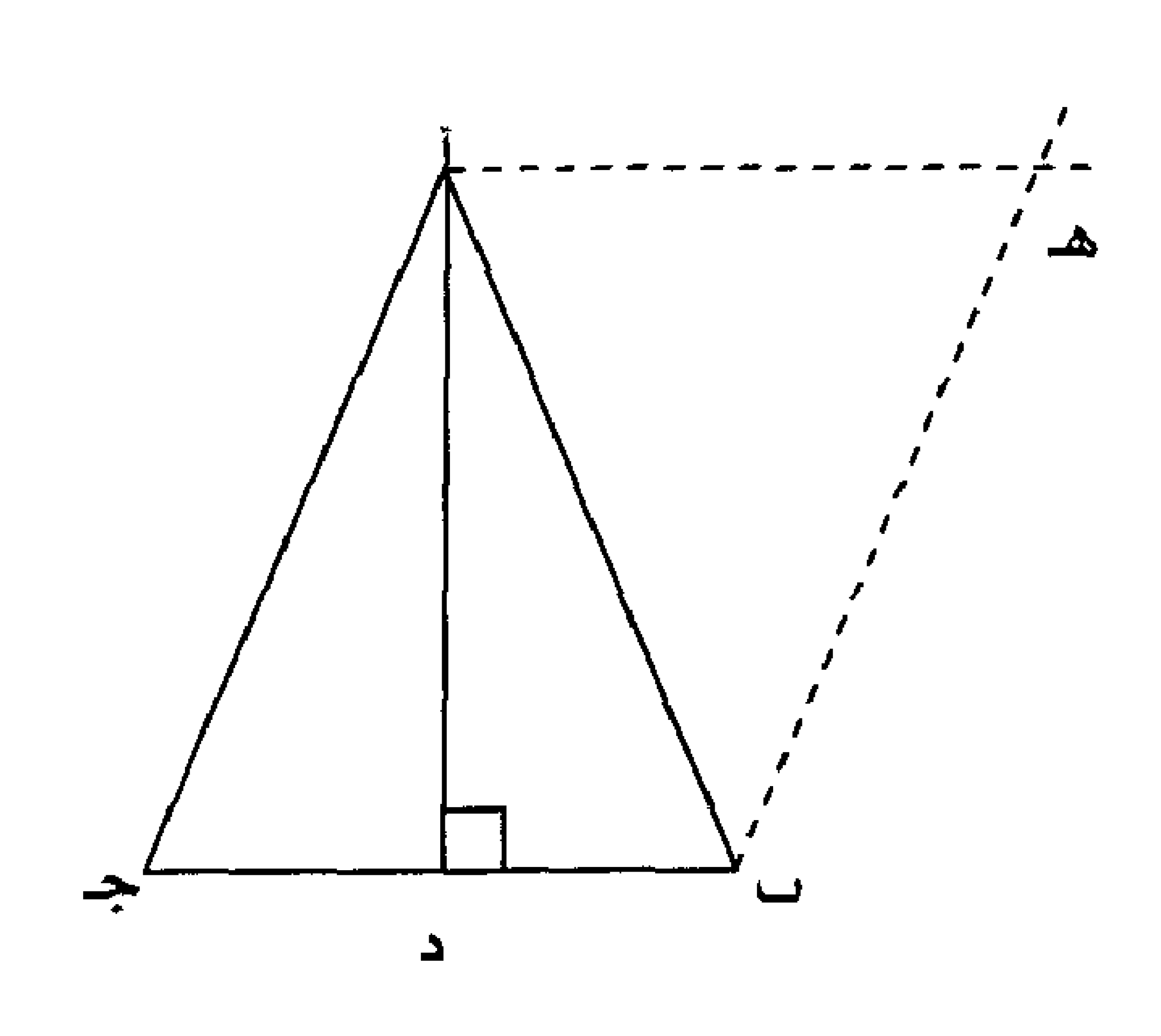
**تدريب:** أثبت أن متوازيي الأضلاع المتحدين في القاعدة والارتفاع متكافئان.

**تدريب:** برهن أن مساحة المثلث تساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع المشترك معه في القاعدة والارتفاع.

**مثال:** أثبت أن مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه

**المعطيات:** أ ب جـ مثلث، ب جـ قاعدته، أ د ارتفاع المثلث على هذه القاعدة

**المطلوب:** إثبات أن مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × أ د




**البرهان:** نرسم من ب مستقيماً يوازي جـ أ، ونرسم من أ مستقيماً يوازي ب جـ فيتلاقى هذان المستقيمان في النقطة هـ.

وينتج عن ذلك أن مساحة متوازي الأضلاع أ هـ ب جـ = ب جـ × أ د

لكن المثلثان أ هـ ب، أ جـ ب ينطبقان بأضلاع ثلاثة:

∴ مساحة $\Delta$ أ ب جـ = مساحة $\Delta$ أ هـ ب

وهكذا ينتج أن مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ مساحة متوازي الأضلاع أ هـ ب جـ

= $\frac{1}{2}$ ب جـ × أ د

تدريب: أثبت أن مساحة المثلث تساوي نصف مساحة المستطيل المتحد معه في القاعدة والارتفاع

**مثال:** أ ب جـ د مستطيل فيه ب جـ = 8 سم، أ ب = 5 سم، س نقطة على ب جـ بحيث أن: س جـ = 3 سم.

**أوجد مساحة الشكل أ ب س د**

**الحل:** مساحة المستطيل أ ب جـ د

$= 5 \times 8 = 40$ سم$^2$

مساحة المثلث د س جـ $= \frac{1}{2} \times 3 \times 5 = 7.5$ سم$^2$

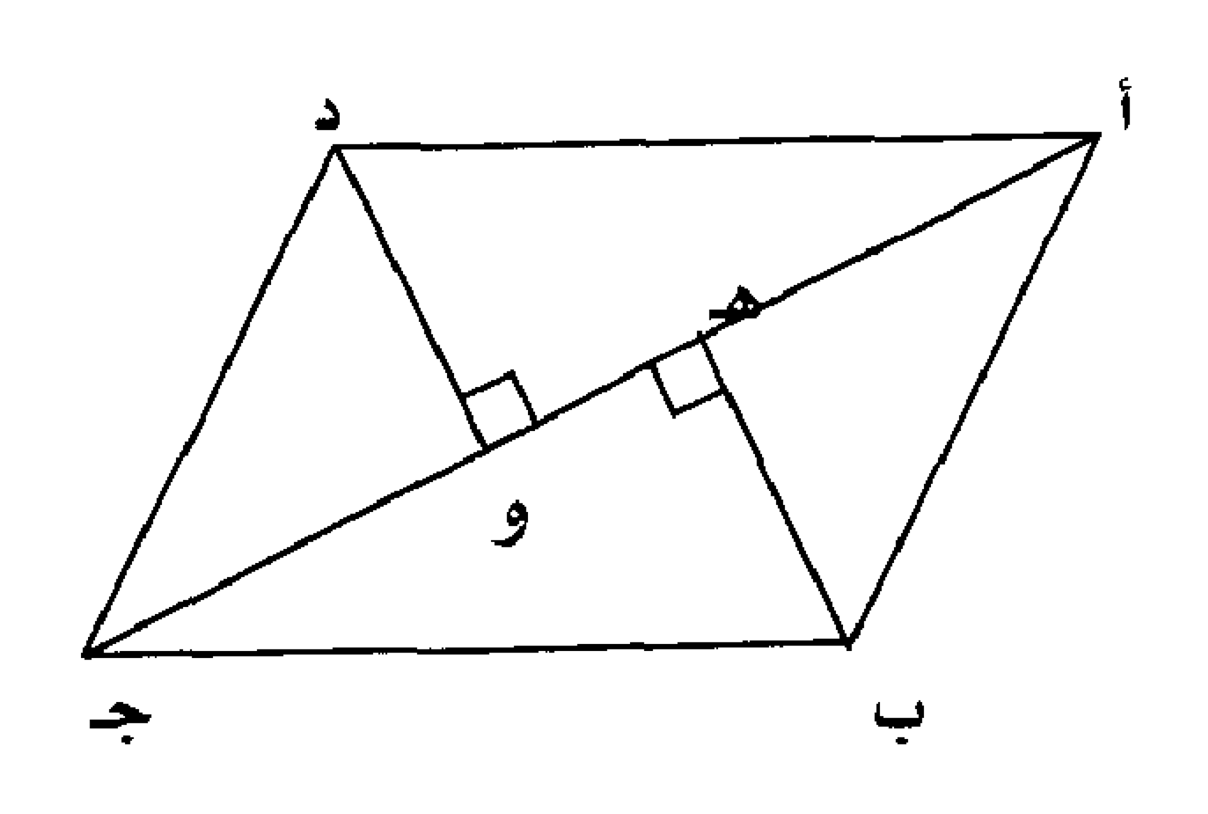
$\therefore$ مساحة الشكل أ ب س د $= 40 - 7.5 = 32.5$ سم$^2$

**هل توجد طرق أخرى للحل؟**

**مثال:** أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه ب هـ ، د و عمودان من ب ، د على أ جـ.

أثبت أن ب هـ = د و

**الحل:** المثلثان أ ب جـ، أ د جـ متكافئان (أ جـ قطر)

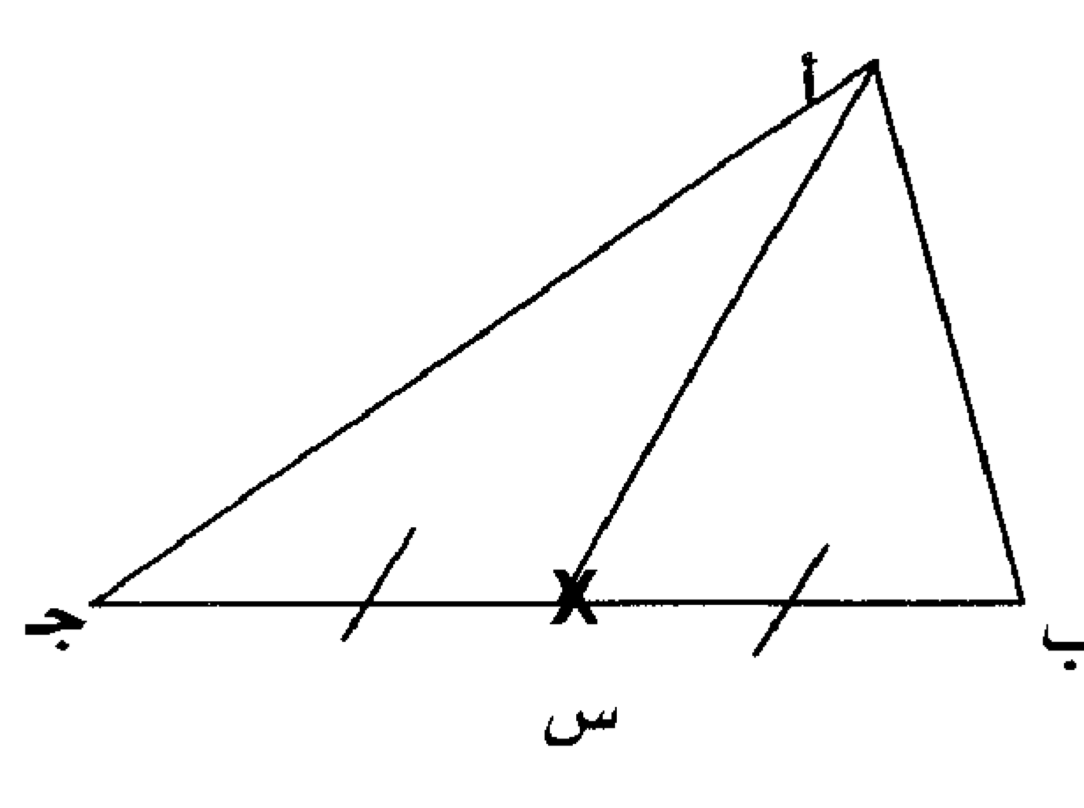



$\therefore$ مساحة $\Delta$ أ ب جـ = مساحة $\Delta$ أ د جـ

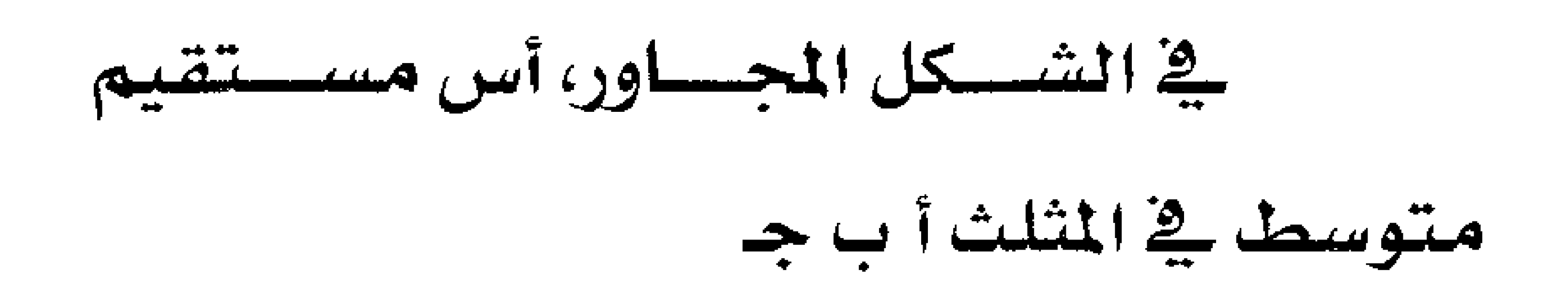
أي أن $\frac{1}{2}$ ب هـ × أ جـ = $\frac{1}{2}$ × د و × أ جـ

وينتج من ذلك أن ب هـ = و د.

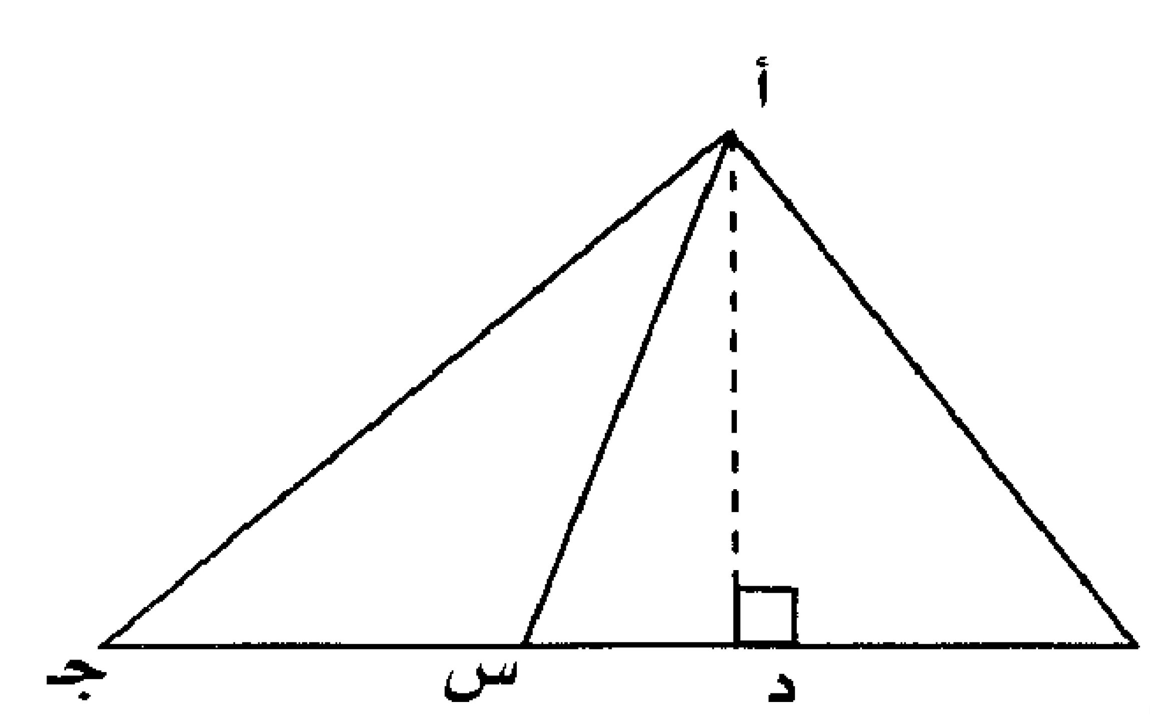
**تدريب:** أ ب جـ ، د ب جـ مثلثان في جهة واحدة من ب جـ وفيهما ب جـ = 8 سم، أ جـ =9 سم. أنزل من ب العمود ب س على أ جـ ، وأنزل من د العمود د ص على ب جـ فإذا كان ب س = 4 سم، د ص = 4.5 سم. برهن أن أ د // ب جـ




**تعريف:** المستقيم المتوسط هو المستقيم الواصل بين أحد الرؤوس ومنتصف الضلع الذي يقابله.



في الشكل المجاور، أس مستقيم متوسط في المثلث أ ب جـ




**مثال:** أثبت أن المستقيم المتوسط في المثلث يقسمه إلى مثلثين متكافئين.

**المعطيات:** أ ب جـ مثلث، أ س مستقيم متوسط

**المطلوب:** إثبات أن

مساحة المثلث أ ب س = مساحة المثلث أ جـ س

**البرهان:** ننزل من أ العمود أ د على ب جـ أو امتداده، فيكون أ د هو ارتفاع المثلث أ ب س بالنسبة للقاعدة ب س ، ويكون أيضاً ارتفاعاً للمثلث أ جـ س بالنسبة للقاعدة جـ س.

$\therefore$ مساحة المثلث أ ب س = $\frac{1}{2}$ ب س × أ د

مساحة المثلث أ جـ س = $\frac{1}{2}$ جـ س × أ د

وبما أن ب س = س جـ (أ س $\overleftrightarrow{}$ مستقيم متوسّط)

∴ ΔΔ أ ب س، أ جـ س متساويان في المساحة أي أنهما متكافئان

**تدريب:** أ ب جـ مثلث، س نقطة على $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أن أ س = $\frac{1}{3}$ أ ب

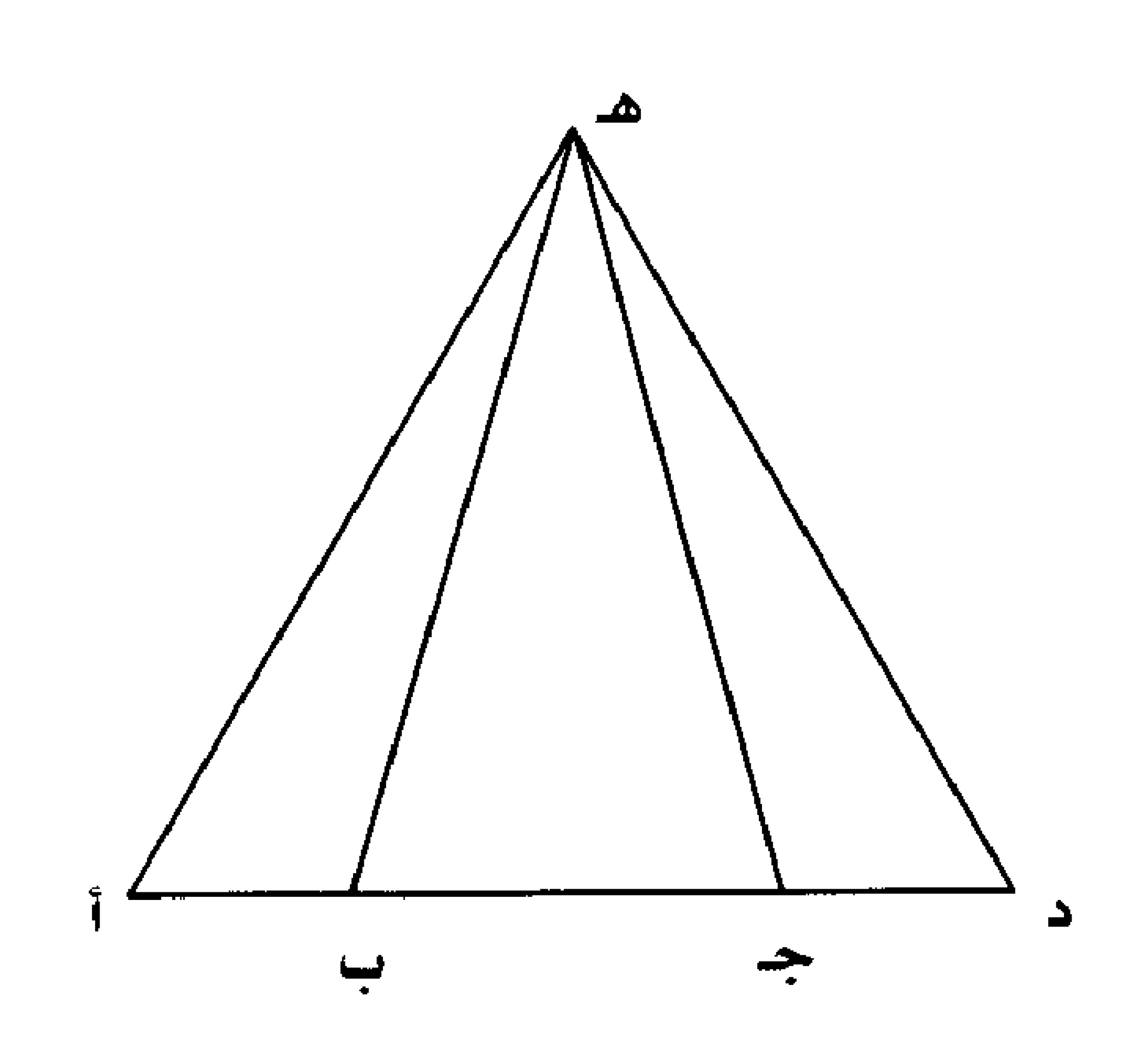
ص نقطة على $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث أن جـ ص = $\frac{1}{3}$ أ جـ.

برهن أن مساحة المثلث أ س جـ = مساحة المثلث ب ص جـ.

## 5 – 4 أسئلة للمناقشة:

1) أ د ، جـ ب قطعتان متقاطعتان في م وتنصّف كل منهما الأخرى،

برهن أن أ جـ ≅ د ب ومتوازيتان.




2) في الشكل المجاور أ هـ ≅ د هـ

∡ أ ≅ ∡ د

∡ أ هـ ب ≅ ∡ د هـ جـ

أثبت أن Δ أ جـ هـ ≅ Δ د ب هـ

3) برهن أن قطري المعين متعامدان وينصّف كل منهما الآخر.

4) أ ب جـ مثلث، د منتصف ب جـ ، أنزل د هـ ⊥ أ ب ، د و ⊥ أ جـ.

إذا كان د هـ ≅ د و ، أثبت أن:

- ∡ ب ≅ ∡ جـ
- ب هـ ≅ جـ و
- أ ب ≅ أ جـ

5) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = 4 سم، ب جـ = 6 سم. فرضت "د" نقطة علىب جـ بحيث كان ب د =4 سم، ورسم د هـ// جـ أ

ويلاقي أ ب في هـ. أحسب طول كل من ب هـ، د هـ.

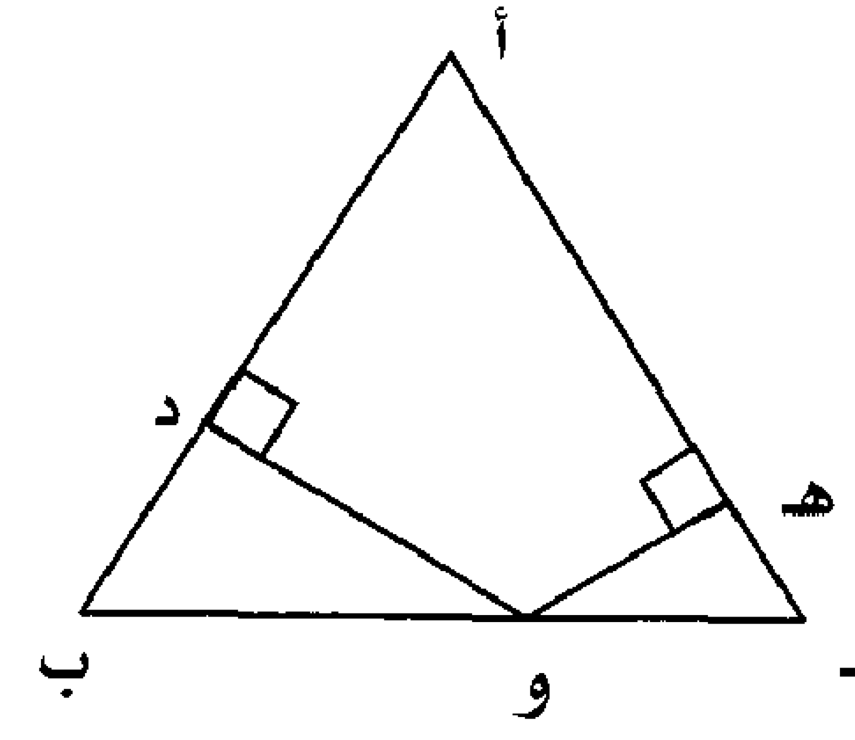
6) أ ب جـ مثلث، رسم س ص // ب جـ، يقطع أ ب في س، أ جـ في ص.

أثبت أن:

- ∆ أ س ص ~ ∆ أ ب جـ
- أ س × أ جـ = أ ص × أ ب

7) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، فرضت النقطة هـ على ب جـ بحيث كان:

أ هـ = أ ب، أثبت أن:




2 (أ ب)$^2$ = ب هـ × ب جـ

8) في الشكل المجاور أ ب ≅ أ جـ أثبت أن:

∆ هـ جـ و ~ ∆ د ب و

9) أ ب جـ مثلث، أ د عمود على ب جـ ، ب و عمود على أ جـ، فإذا كان ب جـ=9سم،

د أ = 4 سم، ب و = 6 سم. أوجد مساحة المثلث أ ب جـ، وأوجد طول أ جـ.

10) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = 3 سم، أ د = 4 سم،

رسم مستقيمان متوازيان من أ ، د فقطع الأول ب جـ في هـ،

وقطع الثاني امتداد ب جـ في و، فإذا كان أ هـ = 3.5 سم.

فما طول العمود النازل من د على ب جـ.

11) أ ب جـ د متوازي أضلاع، س ، ص منتصفا د جـ ، أ د على الترتيب. أثبت أن المثلثين أ س ب، ب جـ ص متكافئان.

12) أ ب جـ مثلث، س منتصف ب جـ ، ص منتصف أ س. برهن أن مساحة المثلث ب س ص = $\frac{1}{4}$ مساحة المثلث أ ب جـ.

13) س ص ع مثلث، ل منتصف قاعدته ص ع ، م نقطة مفروضة على المستقيم المتوسط س ل، أثبت أن المثلثين س ص م ، س ع م متكافئان.

14) ضع إشارة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وإشارة (×) أمام العبارة الخاطئة لكل مما يلي:

أ. جميع المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة.

ب. جميع المستطيلات متشابهة.

ج. المثلثات المتطابقة متشابهة.

د. المثلثات المتشابهة متطابقة.

هـ. التطابق حالة من حالات التشابه.

15) كيف يمكنك تكوين ستة مربعات متطابقة باستعمال 12 عوداً متطابقاً؟

# الفصل السادس

# وحدات القياس

---

- تمهيد

6 – 1 وحدات قياس الطول وتطبيقاتها

6 – 2 وحدات قياس المساحة وتطبيقاتها

6 – 3 وحدات قياس الحجم وتطبيقاتها

6 – 4 وحدات قياس السعة وتطبيقاتها

6 – 5 وحدات قياس الكتلة وتطبيقاتها

6 – 6 وحدات قياس درجة الحرارة وتطبيقاتها

6 – 7 وحدات قياس الزمن وتطبيقاتها

6 – 8 أسئلة للمناقشة

# الفصل السادس

# وحدات القياس

❖ **تمهيد:**

ظهرت حاجة الإنسان إلى استعمال المقاييس منذ نشوء الحضارة، وقد تعددت المقادير بتعدد المجتمعات، فكان لكل دولة أو مدينة وحدات خاصّة بها، وكانوا يجدوا صعوبات في التعامل بينهم عند مبادلة السلع بسبب اختلاف المقاييس.

وفي عهد الرسول صلّى الله عليه وسلّم كان استخدام وحدات القياس والمقاييس ضرورياً لتسيير الأمور الحياتية التي تتعلق بتطبيق الشريعة الإسلامية، فعن ابن عمر – رضي الله عنهما – قال: "فرض رسول الله صلّى الله عليه وسلّم زكاة الفطر صاعاً من تمر، أو صاعاً من شعير..." رواه البخاري(*)

والصاع يساوي أربعة أمداد، والمد يساوي ملء اليدين المعتدلتين، ويختلف تقديره باختلاف نوع الطعام المكيل، وقد قدّره البعض بحوالي ثلاثة كيلوغرامات. أي أنّ الصاع حوالي 3 كغم والصاع أربعة أمداد، لذا فإن المد حوالي 750 غراماً.

كما ذكر الشبر والذراع والباع كوحدات طول في بعض الأحاديث، والباع يساوي أربعة أذرع والذراع حوالي 49 سنتمتر، أي أن الباع حوالي 2 متر تقريباً.

وقد قامت أكاديمية العلوم في فرنسا عام 1790 بالبحث عن نظام موحّد للمقاييس وقد اقترحوا أن يكون نظام القياس عشرياً، وتكون الوحدة الأساسية من الطبيعة، فقرروا أن تكون هذه الوحدة هي المتر وطولها يساوي 1 من 40 مليون من طول خطّ الطول الواصل بين قطبي الكرة الأرضية.

---

(*) صحيح البخاري، محمد بن اسماعيل البخاري، ضبطه ورقّمه: مصطفى ديب البُغا، دمشق دار ابن كثير واليمامة للطباعة والنشر، الطبعة الخامسة، 1414هـ - 1993م، ج2، ص547، في أبواب صدقة الفطر، باب فرض صدقة الفطر، حديث رقم 1432.

وفي المؤتمر الأول للأوزان والمقاييس في باريس عام 1875 تم اعتماد النظام المتري كنظام عالمي في الكثير من الدول، مع احتفاظ بعض الدول مثل بريطانيا بأنظمة قياس خاصّة بها.

ولكن بعد فترة من الزمن تبيّن وجود اختلاف وتباين يصل إلى 0.023 ٪ من المتر، فتقرر في المؤتمر الدولي عام 1960 أن يكون المتر عبارة عن مجموع عدد من أطوال الموجات الضوئية مقداره (1650763.73) موجة منبعثة من أحد نظائر عنصر الكريبتون.

وهذا التعريف هو تعريف يعتمد على ظاهرة طبيعية ثابتة، فيزيد من القدرة على القياس بدقّة أكبر من الاعتماد على كتلة مادّة قد تتغير مع الزمن.



# وحدات القياس

وفيما يلي جدولاً لبعض وحدات القياس التي استخدمها المسلمون سابقاً (قلعه جي وقنيبي، 1988)

| الوحدة | المقدار |
|---|---|
| القطمير | 0.0000029 غ |
| النقير | 0.0000239 غ |
| الفتيل | 0.0001430 غ |
| الخردلة | 0.01033 غ |
| المثقال للذهب | 4.24 غ |
| النواة | 14.88 غ |
| أوقية الفضة | 119.04 غ |
| رطل الفضة | 12 أوقية = 1428.48 غ |
| المد | 543 غ قمح (جمهور)، 815.39 غ قمح (حنفي) |
| | 0.687 لتر (جمهور)، 1.032 لتر (حنفي) |
| الصاع | 2172 غ قمح (جمهور)، 3216.5 غ قمح (حنفي) |
| | 2.748 لتر (جمهور)، 3.362 لتر (حنفي) |
| القربة | 40 صاع، 6848 غ ماء |
| الاصبع | 1.925 سم |
| القبضة | 4 أصابع = 7.7 سم |
| الشبر | 6 أصابع = 11.55 سم |
| القدم | 4 قبضات = 30.8 سم |
| الذراع | 6 قبضات = 46.2 سم |
| الخطوة | 3 أقدام = 92.6 سم |
| الغلوة | 400 ذراع = 184.80 م |
| الميل | 4000 ذراع = 1848 م |
| الفرسخ | 3 أميال = 5544 م |

المصدر: معجم لغة الفقهاء، محمد رواس قلعه جي وحامد صادق قنيبي، ط2، 1988 ، دار النفائس للطباعة والنشر والتوزيع، بيروت، 448 – 450.

## 6 – 1 وحدات قياس الطول وتطبيقاتها

### أولاً: وحدات قياس الطول الفرنسية (المترية)

الوحدة الأساس في هذا النظام هي المتر، ويوجد وحدات أخرى في النظام، بعضها أكبر من المتر وبعضها أصغر من المتر، وفيما يلي ملخّصاً لهذه الوحدات وعلاقتها بالمتر:

| الوحدة | العلاقة مع المتر |
|---|---|
| الكيلومتر (كم) | 1000 م |
| الهكتومتر (هكم) | 100 م |
| الديكامتر (دكم) | 10 م |
| المتر (م) | 1 م |
| الديسمتر (دسم) | $\frac{1}{10}$ م |
| السنتمتر (سم) | $\frac{1}{100}$ م |
| الملمتر (مم) | $\frac{1}{1000}$ م |

لاحظ أن المتر يرتبط بالوحدات الأخرى من خلال قوى العدد (10)، فمثلاً:

1 كم = 1000 م = $10^3$م، وبما أن (1 كم) أكبر من (1 م) فإنّه للتحويل من كيلومتر إلى متر، نضرب الكيلومترات بالعدد (1000) فينتج عدد المترات. وإذا اعتبرنا الانتقال من وحدة إلى الوحدة التالية أو السابقة عبارة عن خطوة، فإن عدد الخطوات للانتقال من الكيلومتر إلى المتر يساوي 3 خطوات، أي أننا نضرب الكيلومترات في ($10^3$) والتي تساوي 1000 للحصول على المترات.

**مثال:** ما قيمة 7 هكم بالملمترات؟

**الحل:** عدد الخطوات للانتقال من هكم إلى مم يساوي (5)، وبما أن (1 هكم) أكبر من (1 مم) فإننا نضرب الهكتومترات بالعدد $10^5$، أي أن:

7 هكم = $1 \times 10^5$ = 700000 مم.

**مثال:** ما قيمة 1500 سم بالهكتومترات؟

**الحل:** عدد الخطوات للانتقال من سم إلى هكم يساوي (4)، وبما أن

(1 سم) أقل من (1 هكم) فإننا نقسم السنتمترات على العدد $10^4$، أي أن:

$$1500 = \frac{1500\ \text{هكم}}{10^4} = \frac{1500\ \text{هكم}}{10000} = 0.15\ \text{هكم}$$

**تدريب:** حوّل وحدات الطول الآتية إلى الوحدة المحددة إزاء كلّ منها:

1) 23 دسم = ............................... م
2) 5.1 دكم = ............................. سم
3) 471 م = ............................... مم
4) 0.04 كم = ............................ هكم

## ثانياً: وحدات قياس الطول الإنجليزية

الوحدة الأساسية في هذا النظام هي اليارد، ويوجد في النظام وحدات أخرى، وفيما يلي ملخّصاً لهذه الوحدات وعلاقتها باليارد والوحدات الأخرى:

| الوحدة | العلاقة مع اليارد | العلاقة مع الوحدات الأخرى |
|---|---|---|
| الميل | 1760 يارد | 5280 قدم = 63360 إنش |
| اليارد | 1 يارد | 3 قدم = 36 إنش |
| القدم | $\frac{1}{3}$ يارد | = 12 إنش |
| الإنش | $\frac{1}{36}$ يارد | |

وللتحويل بين وحدات قياس الطول في النظام الإنجليزي نتّبع القواعد السابقة.

**مثال:** ما قيمة 84 إنش بالأقدام؟

**الحل:** بما أن 1 قدم = 12 إنش، فإننا نقسّم عدد الإنشات على 12 للحصول على عدد الأقدام، أي أن:

84 إنش = (84 ÷ 12) قدم = 7 قدم

**مثال:** ما قيمة 5 ميل بالياردات؟

**الحل:** بما أن 1 ميل = 1760 يارد، فإننا نضرب عدد الأميال في (1760) للحصول على عدد الياردات أي أن:

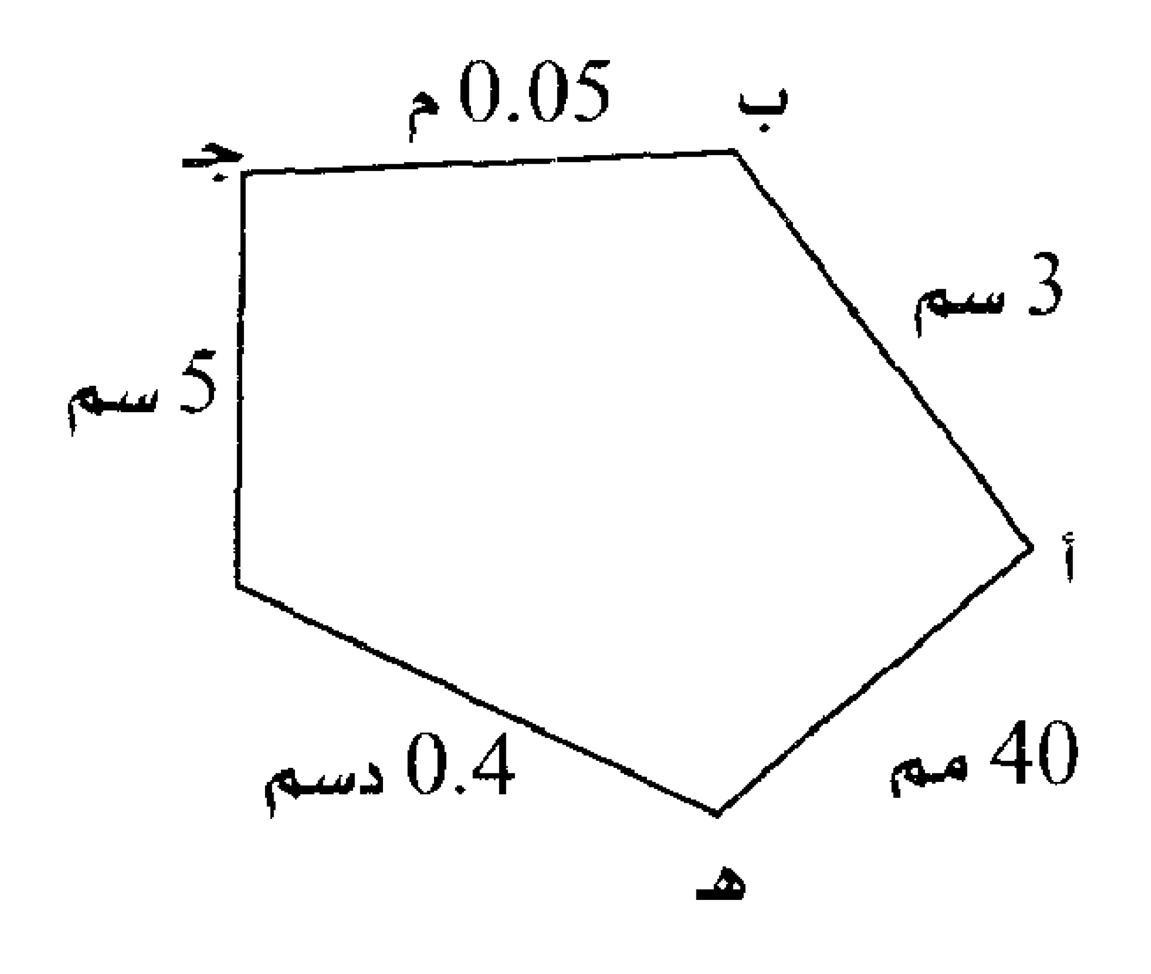
5 ميل = 5 × 1760 يارد = 8800 يارد.

**تدريب:** حوّل وحدات الطول الآتية إلى الوحدة المحددة إزاء كل منها:

1) 48 قدم = ................................ يارد
2) 1.5 يارد = ................................ إنش
3) 0.4 ميل = ................................ يارد
4) 31680 إنش = ............................ ميل

**تطبيقات على وحدات قياس الطول:**

❖ **محيط المضلّع**




محيط المضلّع هو مجموع أطوال أضلاعه.

**مثال:** جد محيط المضلّع الخماسي المجاور:

**الحل:** نحوّل أطوال أضلاع المضلّع إلى وحدة واحدة ولتكن السنتمتر.

أ ب = 3 سم

ب جـ = 0.05 م = 5 سم

جـ د = 5 سم

د هـ = 0.4 دسم = 4 سم

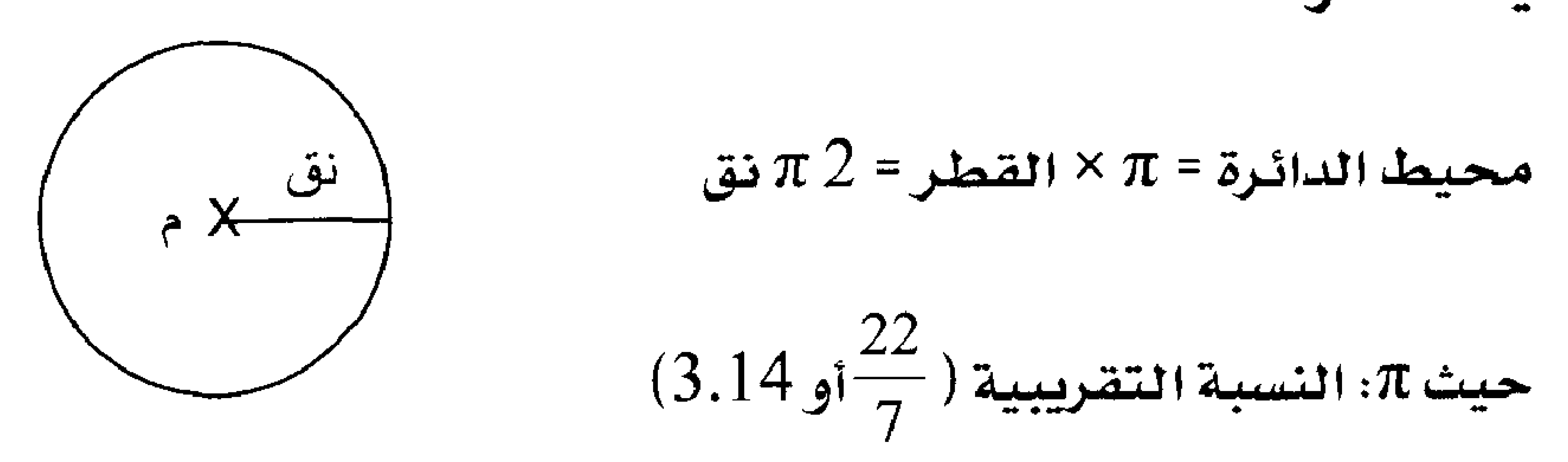
هـ أ = 40 مم = 4 سم

محيط المضلّع = 3 سم + 5 سم + 5 سم + 4 سم + 4 سم

= 21 سم.

**تدريب:** جد محيط مستطيل طوله 15 قدم وعرضه 4 ياردات.

❖ **محيط الدائرة:**




محيط الدائرة = $\pi$ × القطر = 2 $\pi$ نق

حيث $\pi$: النسبة التقريبية ( $\frac{22}{7}$ أو 3.14)

نق: نصف قطر الدائرة

**مثال:** جد محيط دائرة نصف قطرها 7 إنشات

**الحل:** محيط الدائرة = 2 $\pi$ نق

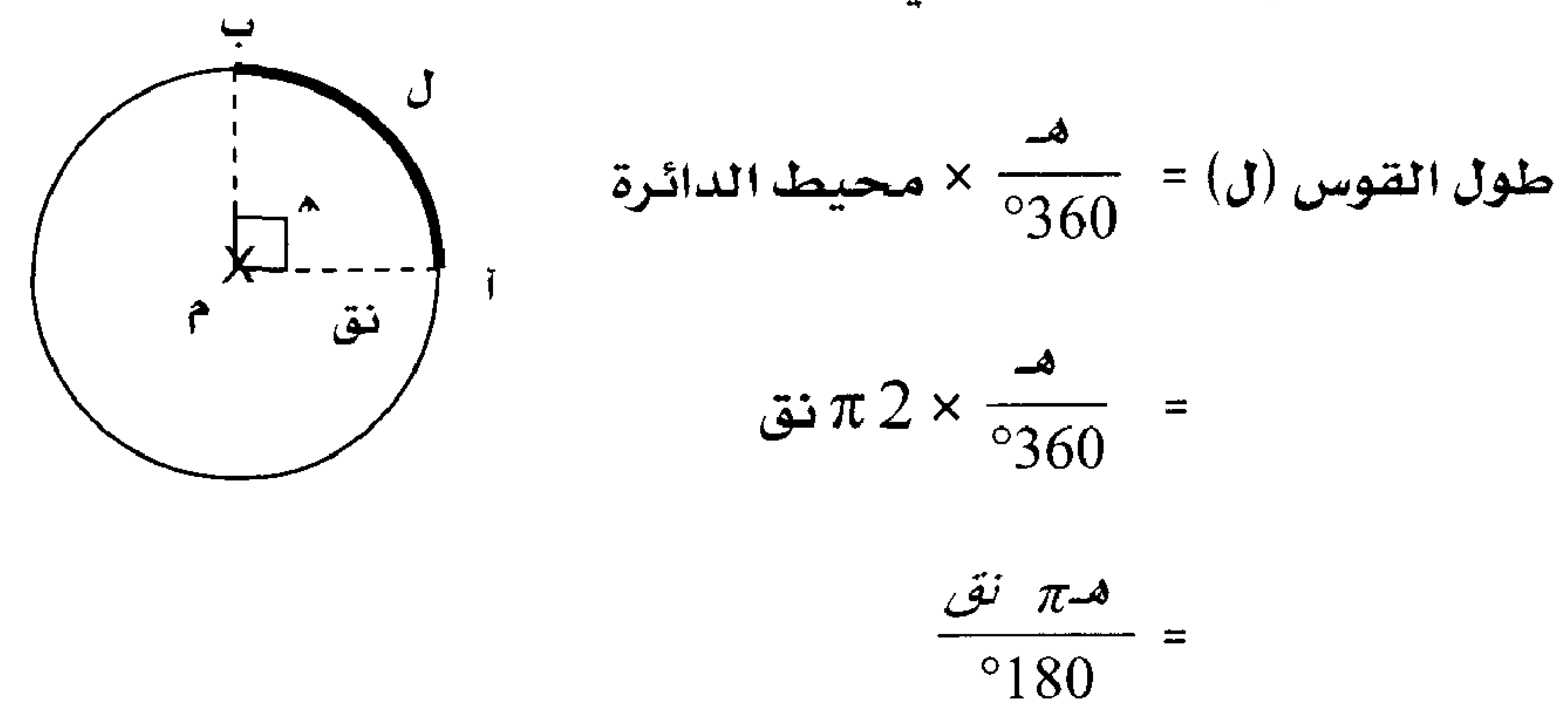
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7$$

= 44 إنش

**تدريب:** جد نصف قطر دائرة محيطها 6.28 دسم (اعتبر $\pi$ = 3.14)

### ❖ طول القوس في الدائرة

**القوس: هو جزء من دائرة محصور بين نقطتين عليها، وطول القوس هو جزء من محيط الدائرة، ففي الشكل المجاور يكون طول القوس مساوياً لربع محيط الدائرة لأنه يقابل زاوية قياسها $90^\circ$، أي أن:**




$$\text{طول القوس (ل)} = \frac{\text{هـ}}{360^\circ} \times \text{محيط الدائرة}$$

$$= \frac{\text{هـ}}{360^\circ} \times 2\pi \,\text{نق}$$

$$= \frac{\text{هـ}\,\pi\,\text{نق}}{180^\circ}$$

**حيث هـ: الزاوية المقابلة للقوس**

**نق: نصف قطر الدائرة**

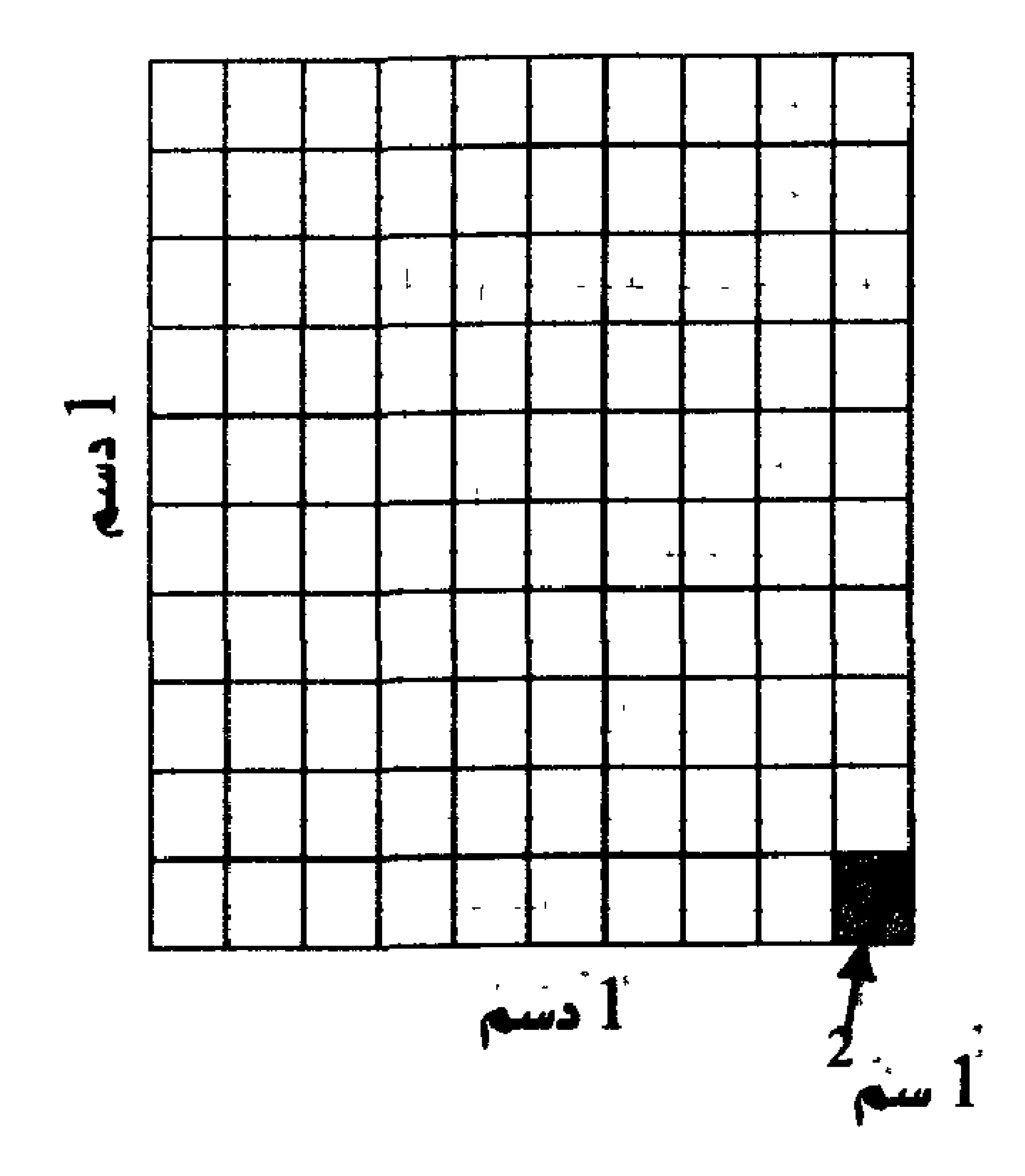
**مثال: جد طول قوس في دائرة نصف قطرها 18 سم ويقابل زاوية قياسها $70^\circ$.**

**الحل:** $\text{ل} = \dfrac{70^\circ \times \frac{22}{7} \times 18}{180^\circ} = 22$ سم

**تدريب: جد نصف قطر دائرة فيها قوس طوله $\pi$ م ويقابل زاوية قياسها $180^\circ$.**



## 6 – 2 وحدات قياس المساحة وتطبيقاتها




مرّ معنا سابقاً أن المساحة هي عدد الوحدات المربعة التي تغطّي الشكل، فالمربع الذي طول ضلعه 1 سم تكون مساحته 1 سم$^2$، والمربع الذي طول ضلعه 1 دسم تكون مساحته 1 دسم$^2$، ولكن 1 دسم = 10 سم، فما قيمة 1 دسم$^2$ بالسنتمترات المربعة؟

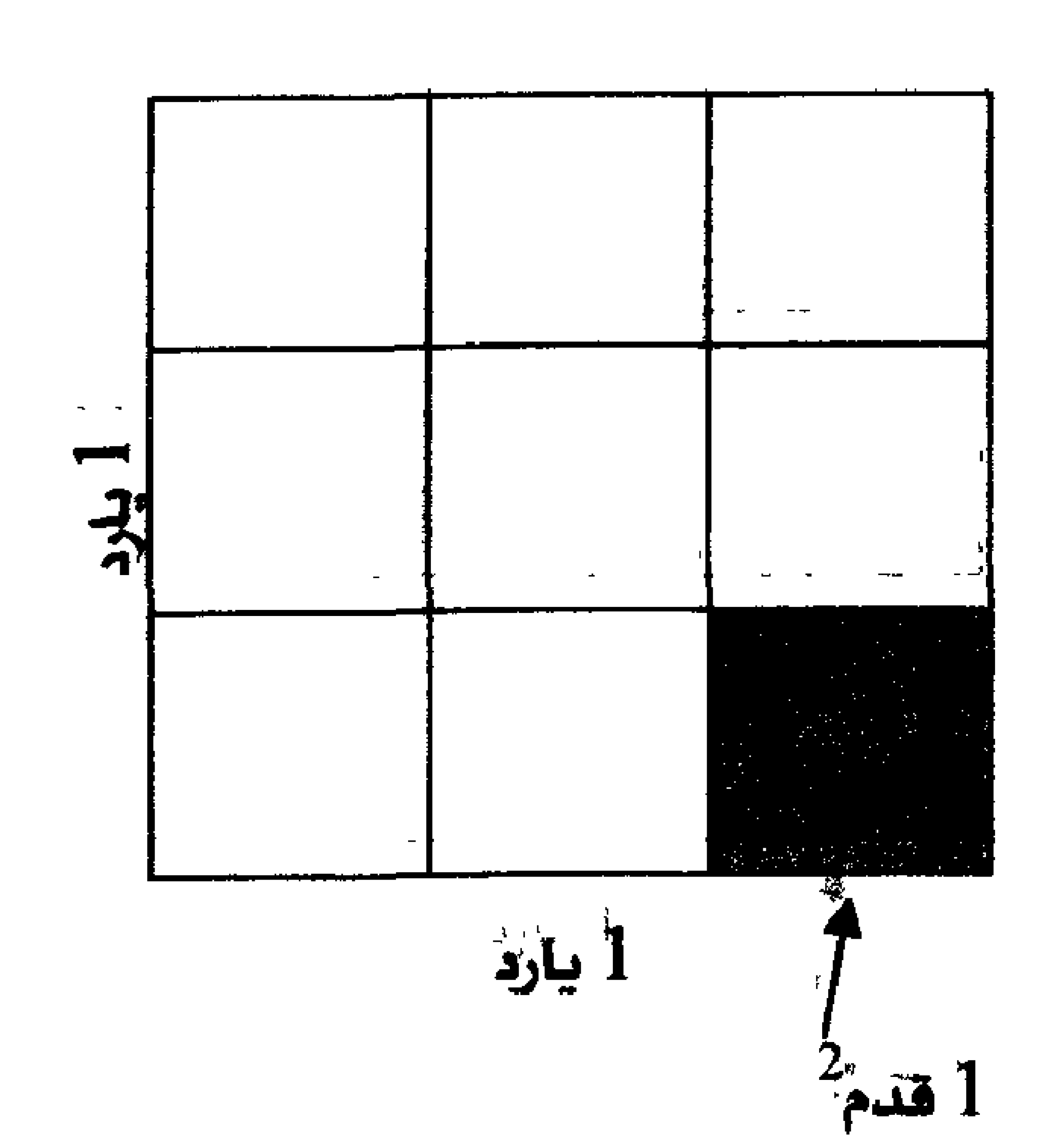
بما أن مساحة المربع = الضلع × الضلع

= 1 دسم × 1 دسم

= 10 سم × 10 سم

= 100 سم$^2$

فإن 1 دسم$^2$ = 100 سم$^2$




مثال: ما قيمة اليارد المربّع بالأقدام المربّعة؟

الحل: بما أن اليارد = 3 قدم

فإن 1 يارد$^2$ = 3 قدم × 3 قدم

= 9 قدم$^2$

**مثال: أكمل الفراغ فيما يلي:**

1) 3 دكم$^2$ = .................. دسم$^2$
2) 288 إنش$^2$ = .................. قدم$^2$
3) 4580 مم$^2$ = .................. م$^2$

**الحل:**

1) بما أن 1 دكم = 100 دسم، فإن 1 دكم$^2$ = 100 دسم × 100 دسم أي أن 1 دكم$^2$ = 10000 دسم$^2$ وهذا يعني أن 3 دكم$^2$ = 30000 دسم$^2$
2) بما أن 1 قدم = 12 إنش، فإن 1 قدم$^2$ = 12 إنش × 12 إنش أي أن 1 قدم$^2$ = 144 إنش$^2$ وهذا يعني أن 288 إنش$^2$ = 2 قدم$^2$
3) بما أن 1 م = 1000 مم، فإنّ 1 م$^2$ = 1000 مم × 1000 مم أي أن 1 م$^2$ = 1000000 مم$^2$ وهذا يعني أن 4580 مم$^2$ = 0.004580 م$^2$

**تدريب: أكمل الفراغ فيما يلي:**

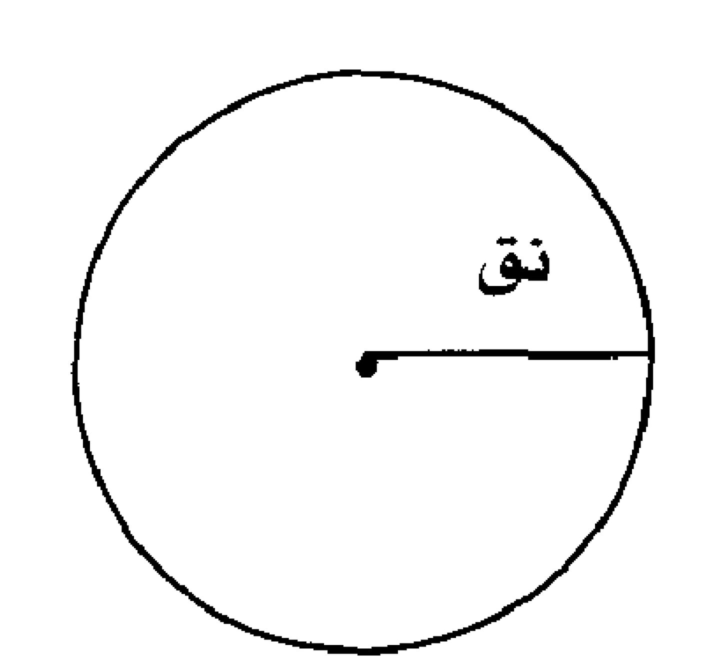
1) 7 هكم$^2$ = ............................ م$^2$
2) 3097600 يارد$^2$ = ................ ميل$^2$
3) 0.035 سم$^2$ = ...................... مم$^2$
4) 98 دكم$^2$ = ......................... كم$^2$
5) 81 قدم$^2$ = .......................... يارد$^2$

**تطبيقات على وحدات قياس المساحة:**

◈ **مساحة الدائرة:**

مساحة الدائرة = $\pi$ نق$^2$

**مثال:** جد مساحة دائرة نصف قطرها 9 سم.

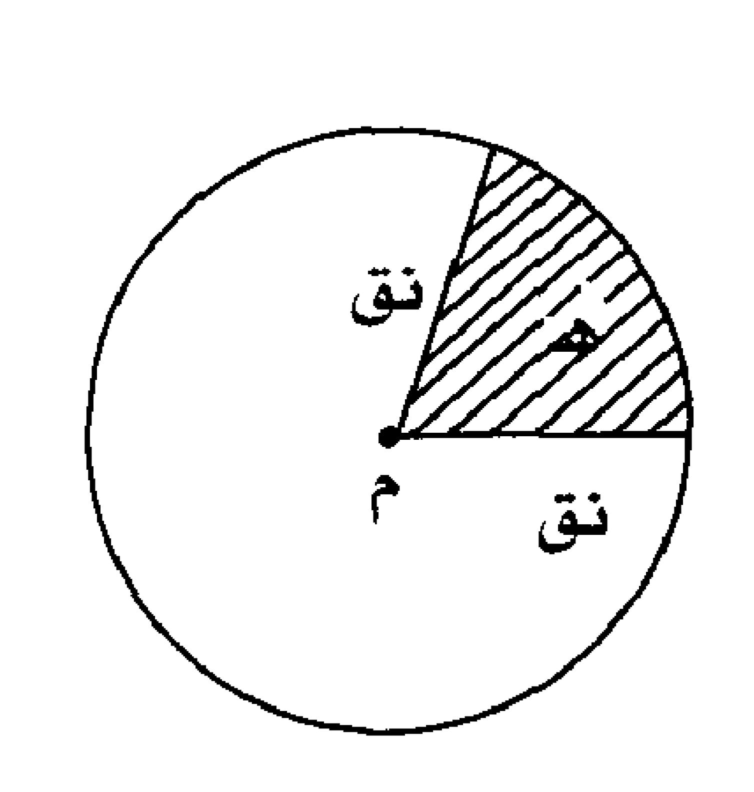



**الحل:** مساحة الدائرة = $\pi\,(9)^2$

= 81 $\pi$ سم$^2$

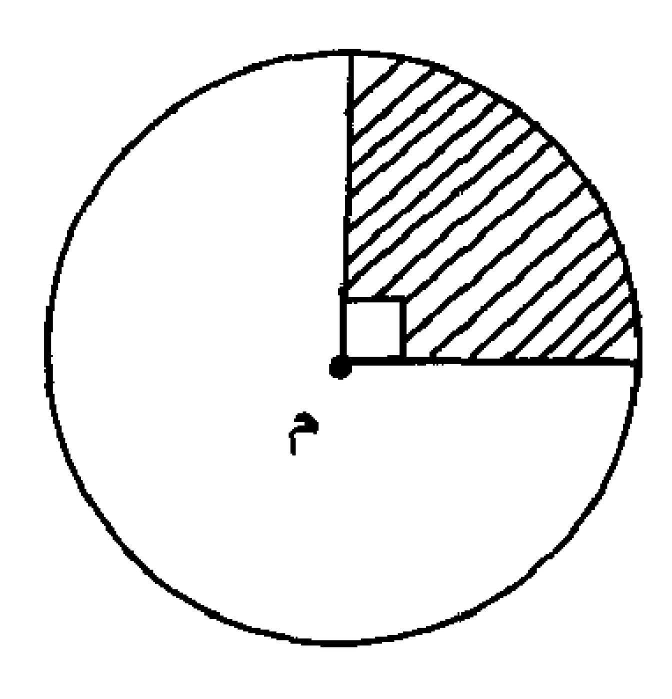
**تدريب:** جد نصف قطر دائرة مساحتها 144$\pi$ إنش$^2$.

◈ **مساحة القطاع الدائري:**




يسمّى الجزء المظلل من الدائرة قطاعاً دائرياً، وهو المنطقة المحصورة بين نصفي قطرين وقوس مارّ بنهايتي نصفي القطرين.

وكل قطاع دائري له زاوية محصورة بين نصفي القطرين، وتقاس مساحة القطاع الدائري من خلال نسبة قياس زاوية القطاع إلى الدورة الكاملة (360°)، فمثلاً: إذا كان قياس زاوية القطاع 90°، فإنّ مساحة القطاع = $\frac{90}{360°}$ × مساحة الدائرة.




وهذا يعني أن مساحة القطاع تساوي ربع مساحة الدائرة.

ويمكن حساب مساحة القطاع باستخدام العلاقة الآتية:

$$\text{مساحة القطاع} = \frac{\text{هـ}}{360°} \times \pi \times \text{نق}^2$$

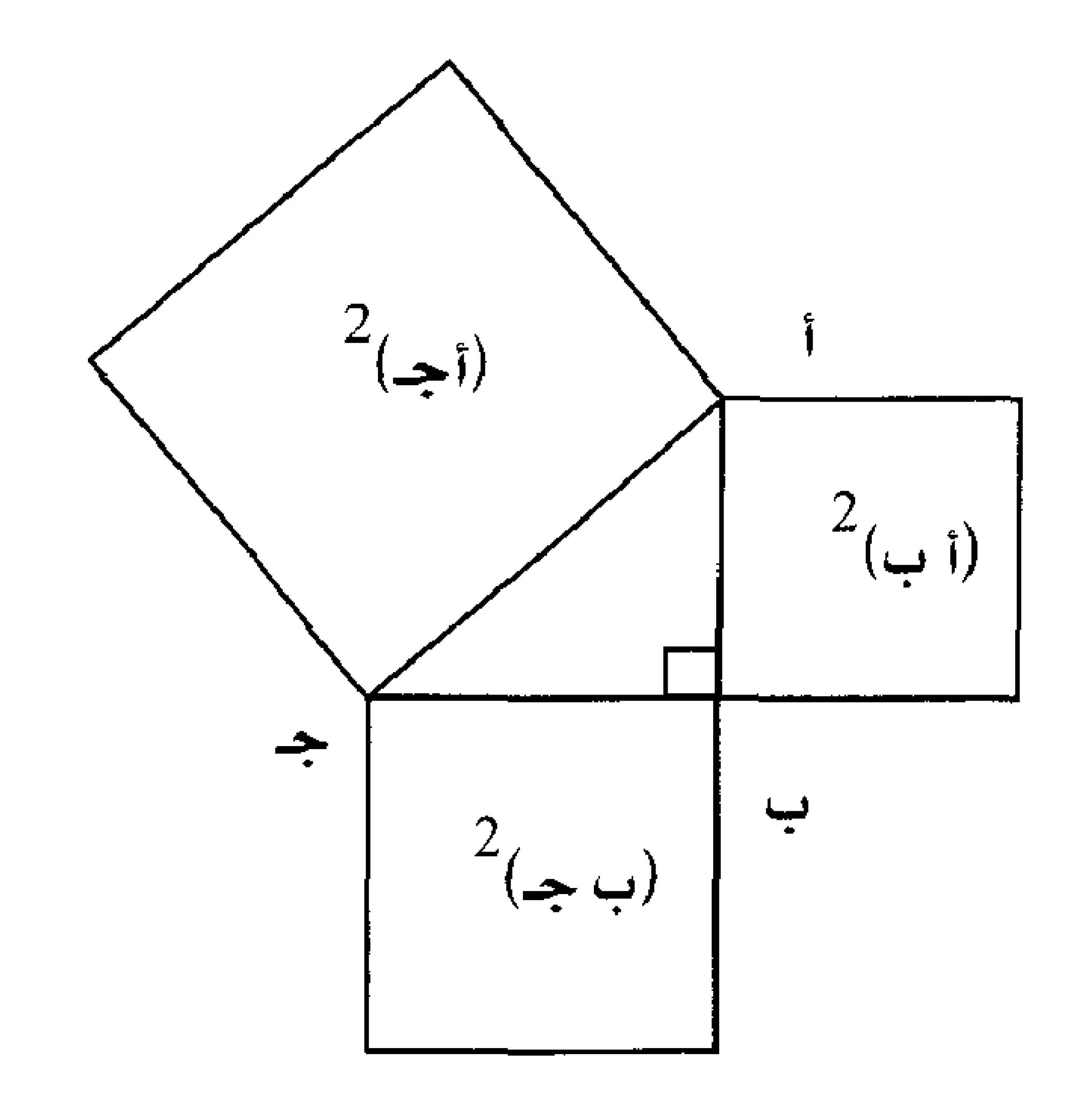
**مثال:** جد مساحة القطاع الذي زاويته 36° ونصف قطره 7سم.

**الحل:** مساحة القطاع $= \frac{36}{360°} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= \frac{154}{10} = 15.4$ سم$^2$.

**تدريب:** جد زاوية قطاع دائري مساحته $2\pi$ قدم$^2$ ونصف قطره 4 قدم.

### ◈ نظرية فيثاغورس:



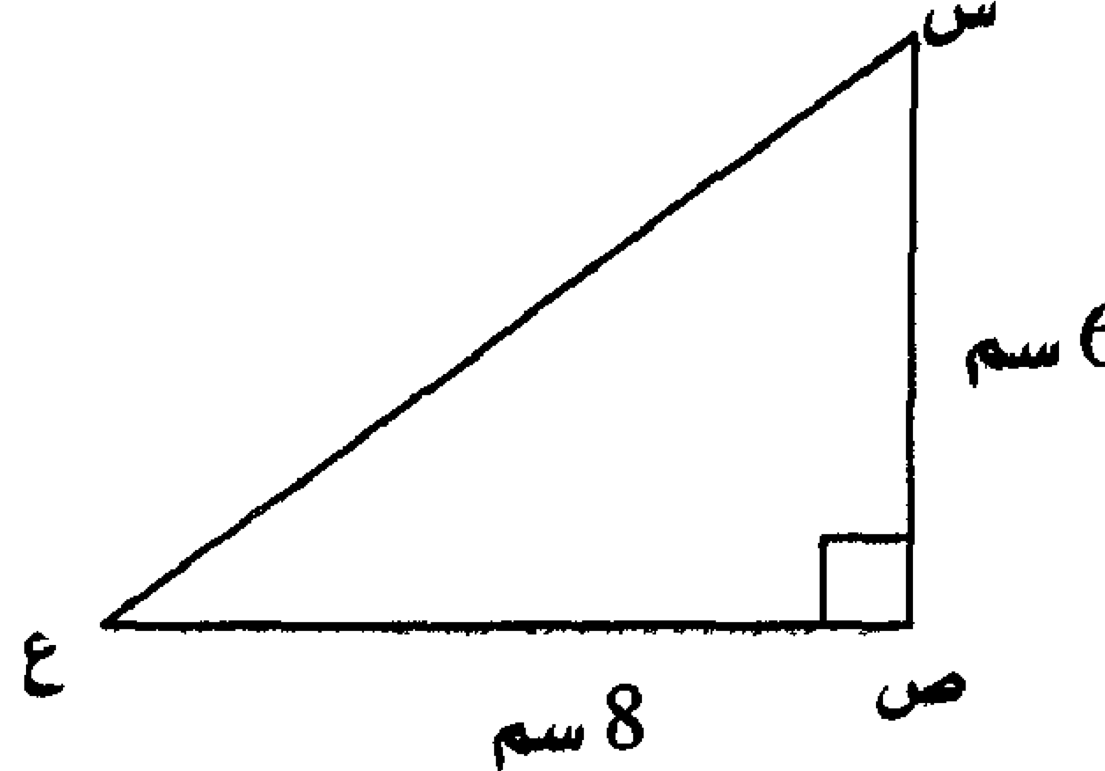

تنصّ نظرية فيثاغورس على مايلي:

"مساحة المربع المنشأ على الوتر في المثلث قائم الزاوية تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين".

وبالرموز، حسب الشكل المجاور فإنّ:

$$(\text{أ جـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب جـ})^2$$

**مثال:** س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص، فيه س ص = 6 م، ص ع = 8 م، جد طول س ع.




**الحل:** حسب نظرية فيثاغورس فإن:

$(\text{س ع})^2 = (\text{س ص})^2 + (\text{ص ع})^2$

$= (6)^2 + (8)^2 = 100$

∴ س ع = 10 م

**تدريب:** أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ب جـ = 6 إنش، جد طول أ جـ.

◈ **عكس نظرية فيثاغورس:**

في أي مثلث، إذا كان مجموع مربعي طولي الضلعين الأصغرين يساوي مربع الضلع الأكبر، فإن المثلث قائم الزاوية، فمثلاً في المثلث س ص ع، إذا كان:

$(\text{س ص})^2 + (\text{ص ع})^2 = (\text{س ع})^2$ فإن المثلث س ص ع قائم الزاوية في ص (لماذا؟).

**مثال:** س ص ع مثلث فيه س ص = 12 سم، ص ع = 13 سم، س ع = 5 سم، بيّن أن المثلث س ص ع قائم الزاوية في س.

**الحل:** مجموع مربّعي طولي الضلعين الأصغرين $= (12)^2 + (5)^2$

$= 144 + 25 = 169$

مربع طول الضلع الأكبر $= (13)^2 = 169$

∴ المثلث س ص ع قائم الزاوية، وبما أن الضلع الأكبر هو ص ع فإنه يقابل الزاوية الكبرى وهي (س)، وقياسها يساوي 90°.

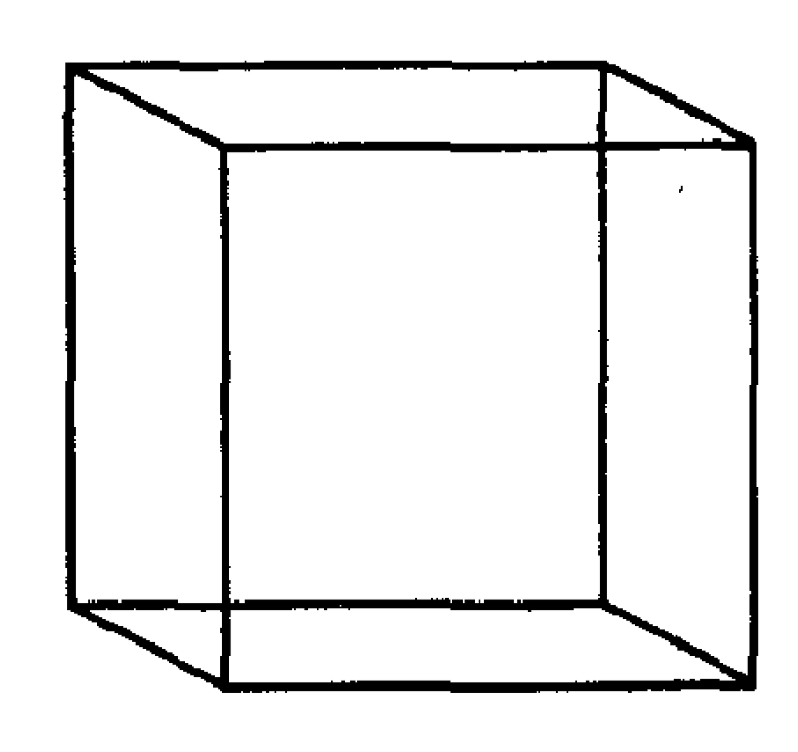
**تدريب:** أيّ الأضلاع الآتية يمكن أن تكون أضلاع مثلث قائم الزاوية:

1) أ ب = 24 م    ب جـ = 26 م    أ جـ = 10 م

2) س ص = 7 قدم    ص ع = 8 قدم    س ع = 12 قدم

3) هـ و = $\sqrt{6}$ مم    و ز = 3 مم    هـ ز = $\sqrt{15}$ مم

◈ **مساحة سطح المكعّب:**



**المكعّب:** هو متوازي السطوح، جميع سطوحه مربّعات متساوية.

مساحة سطح المكعب تساوي مجموع مساحات الأوجه الستّة للمكعب، فالمكعّب الذي طول ضلعه س تكون مساحة سطحه = 6 س$^2$.

**مثال:** جد مساحة سطح مكعب طول ضلعه 2 م.

**الحل:** مساحة سطح المكعب = 6 $(2)^2$

= 24 م$^2$

لاحظ أنّ مساحة سطح المكعب تتكون من مساحتي القاعدتين إضافة إلى المساحة الجانبية التي تتكون من أربعة مربعات، وبالرموز فإنّ مساحة القاعدتين = 2س$^2$ والمساحة الجانبية = 4س$^2$، فيكون مجموع المساحتين = 6س$^2$.

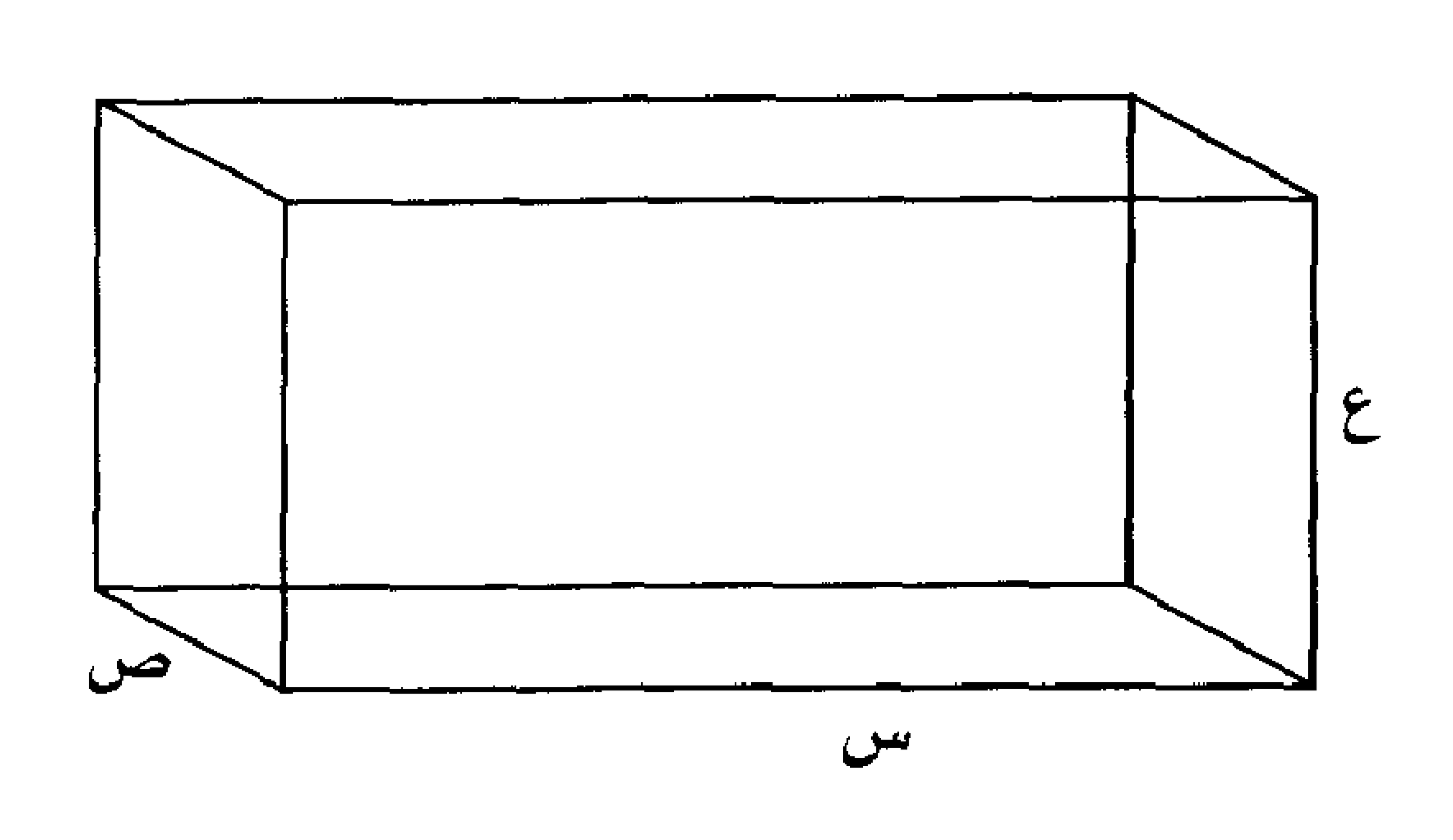
ويمكن إيجاد المساحة الجانبية من خلال القانون الآتي:

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × ارتفاع المكعب

$= (4س) × س = 4 س^2$

**تدريب:** جد طول ضلع مكعب مساحته الجانبية 36 إنش$^2$.

## ◈ مساحة سطح متوازي المستطيلات:




متوازي المستطيلات:

هو متوازي سطوح جميع سطوحه مستطيلات، ويتكون متوازي المستطيلات من ستّة أوجه مستطيلة وله ثلاثة ابعاد هي طول القاعدة (س) وعرضها (ص) وارتفاع متوازي المستطيلات (ع)

مساحة سطح متوازي المستطيلات = مساحة القاعدتين + المساحة الجانبية

= 2(س × ص) + (2س + 2ص) × ع

= 2 (س ص + س ع + ص ع)

**مثال:** جد مساحة سطح متوازي المستطيلات الذي طول قاعدته 5 سم وعرضها 4 سم وارتفاعه 6 سم.

**الحل:** مساحة سطح متوازي المستطيلات

$= 2\,(4 \times 5 + 6 \times 5 + 6 \times 4)$

$= 2\,(20 + 30 + 24)$

$= 2\,(74)$

$= 148$ سم$^2$

**تدريب:** جد مساحة سطح صندوق على شكل متوازي مستطيلات مفتوح من الأعلى وأبعاده 4 دسم، 35 سم، 0.3 م.

**ملاحظة:** يسمّى كل من المكعب ومتوازي المستطيلات موشوراً رباعياً، فالموشور هو مجسّم له قاعدتان متطابقتان وأوجهه الجانبية مستطيلات، ويسمّى الموشور حسب عدد أضلاع قاعدته.

**مثال:** جد مساحة سطح الموشور الثلاثي المجاور.

8 سم
5 سم
5 سم
10 سم

**الحل:** لإيجاد مساحة القاعدة نجد ارتفاع المثلث بإنزال عمود من رأس المثلث على القاعدة، وباستخدام نظرية فيثاغورس نجد أن ارتفاع المثلث = 3 سم

الفصل السادس

مساحة القاعدتين $= 2 \times (\frac{1}{2} \times 8 \times 3)$

$= 24$ سم$^2$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

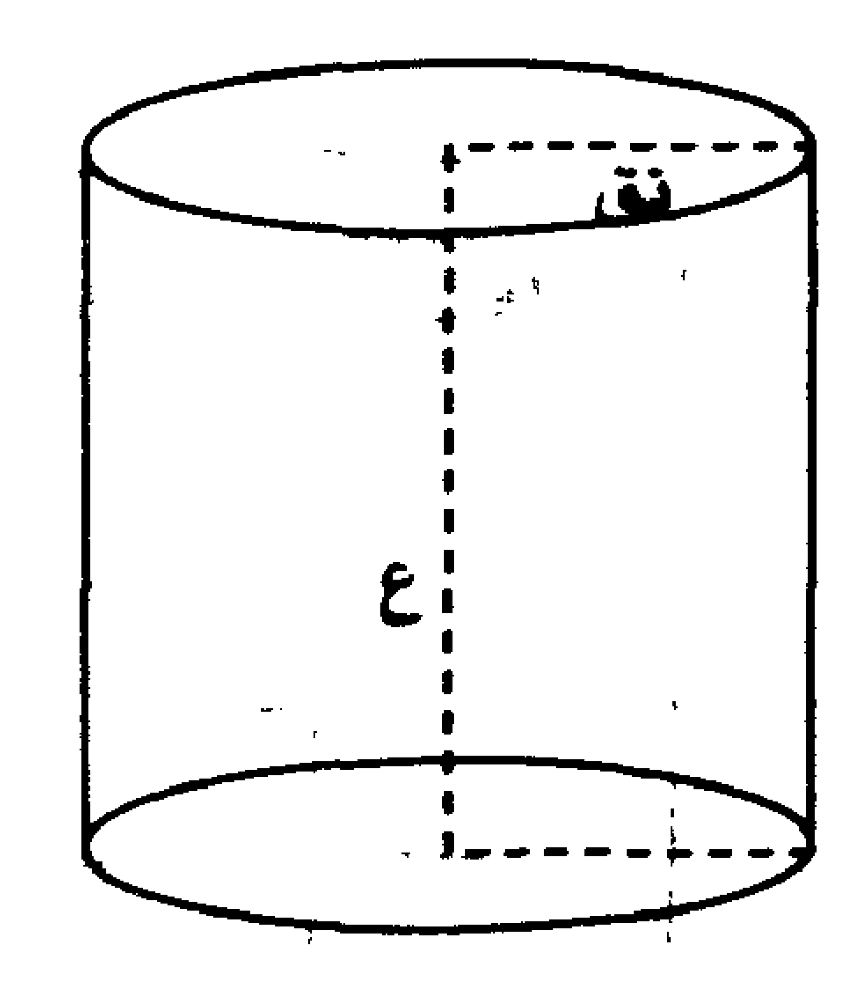
$= (5 + 5 + 8) \times 10$

$= 18 \times 10 = 180$ سم$^2$

مساحة سطح الموشور $= 24 + 180$

$= 204$ سم$^2$

## ◈ مساحة سطح الأسطوانة




**الأسطوانة:** مجسّم له قاعدتان دائريتان متطابقتان (ويقعان في مستويين متوازيين) ويسمّى المستقيم الواصل بين مركزي الدائرتين، محور الأسطوانة.

مساحة سطح الأسطوانة = مساحة القاعدتين + المساحة الجانبية

$= 2$ ($\pi$ نق$^2$) + ($2\pi$ نق) × ع

$= 2\pi$ نق (نق + ع)

**لاحظ أن المساحة الجانبية للأسطوانة هي مساحة مستطيل طوله محيط الدائرة (2 π نق) وعرضه ارتفاع الأسطوانة (ع).**

**مثال:** **جد مساحة سطح أسطوانة ارتفاعها 3 قدم، ونصف قطر قاعدتها 2 قدم.**

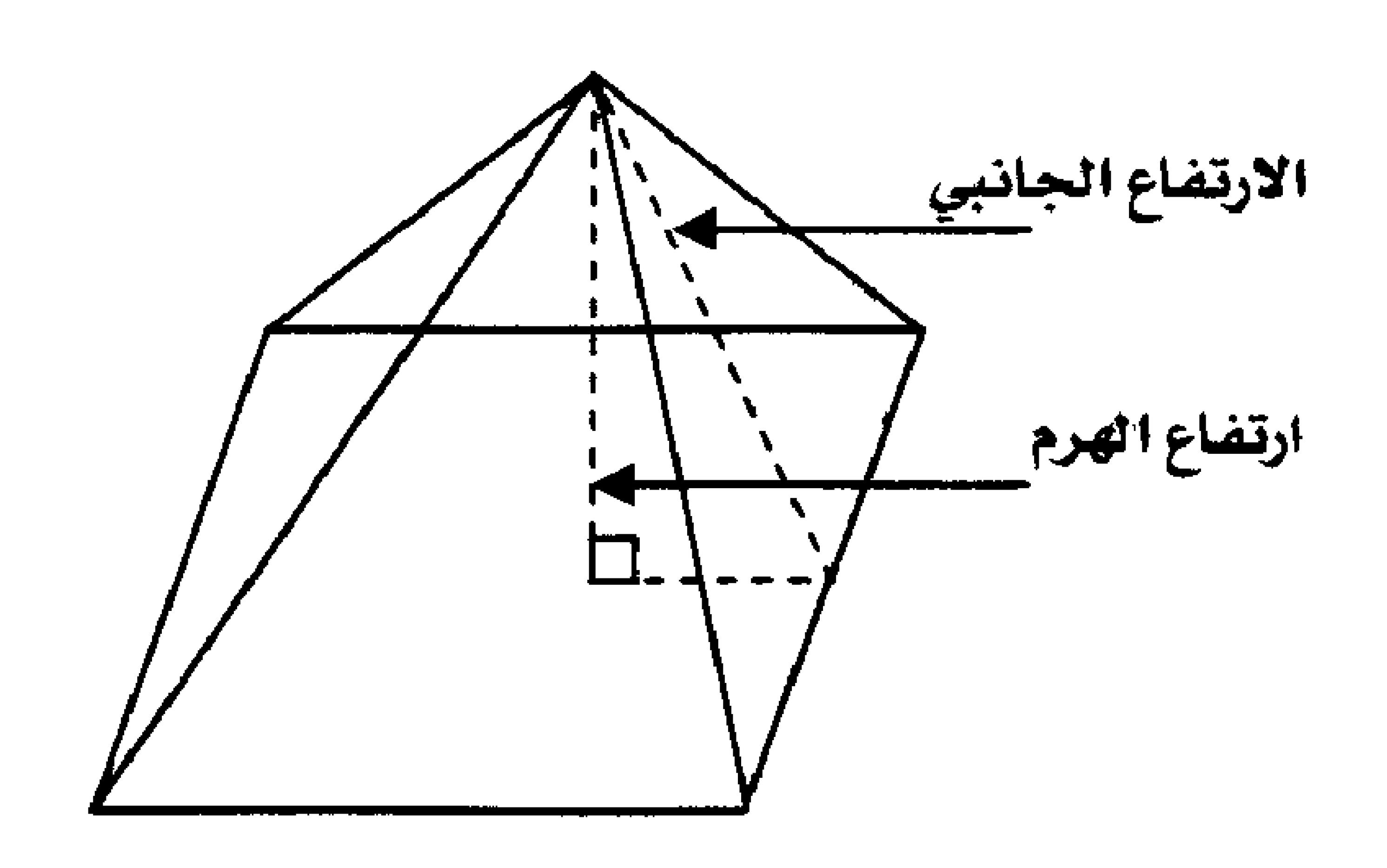
**الحل:** **مساحة سطح الأسطوانة** $= 2\pi(2)(2+3)$

$= 4\pi(5) = 20\pi$ قدم²

**تدريب:** **جد ارتفاع أسطوانة مساحة سطحها 120 π مم² ونصف قطرها 5 مم.**

◈ **مساحة سطح الهرم القائم:**

**الهرم: هو مجسّم له قاعدة منتظمة وأسطحه الجانبية مثلثات، ويسمّى الهرم حسب قاعدته، فالهرم الثلاثي قاعدته مثلثة والرباعي قاعدته مربّعة، وهكذا ...**




**مساحة سطح الهرم = مساحة القاعدة + ($\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي)**

**مثال:** **جد مساحة سطح هرم رباعي طول ضلع قاعدته 6 سم وارتفاعه 4 سم.**

**الحل:** **لإيجاد الارتفاع الجانبي (ل)**

ل² $= (3)^2 + (4)^2 = 25$

ل = 5 سم

مساحة سطح الهرم = $(6\times 6) + (5 \times 24 \times \frac{1}{2})$

= $36 + 60$

= 96 سم$^2$

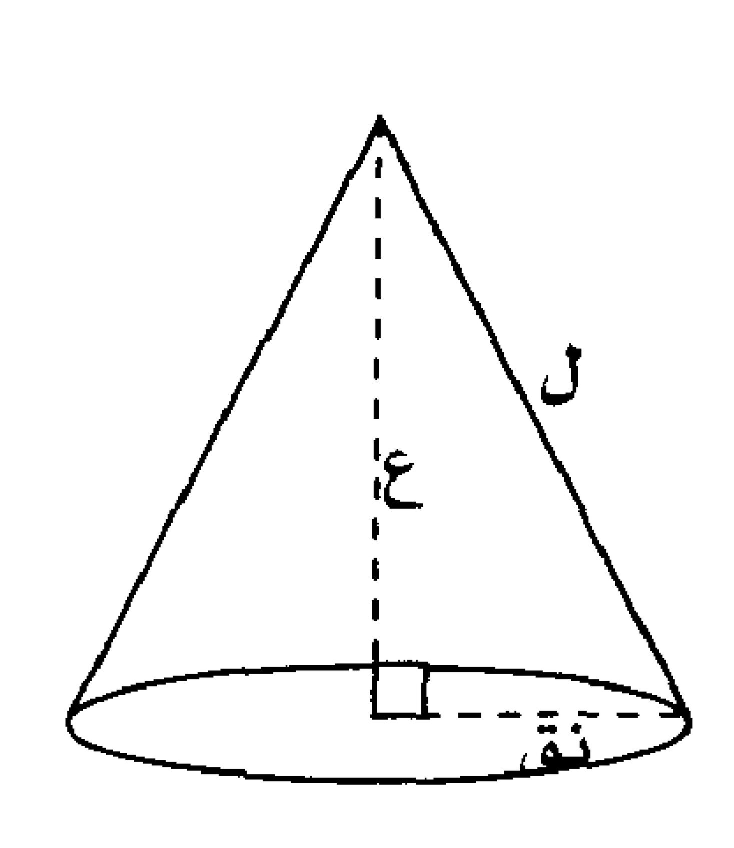
لاحظ أن المساحة الجانبية للهرم تساوي مجموع مساحات أوجه الهرم.

### ◈ مساحة سطح المخروط القائم:

مساحة سطح المخروط = مساحة القاعدة + المساحة الجانبية

= π نق$^2$ + π نق ل

حيث ل: الارتفاع الجانبي للمخروط (الراسم)




**مثال:** جد مساحة سطح مخروط قائم نصف قطر قاعدته 2 م وارتفاعه الجانبي 3 م.

**الحل:** مساحة سطح المخروط = $\pi\,(2)^2 + \pi\,(2) \times (3)$

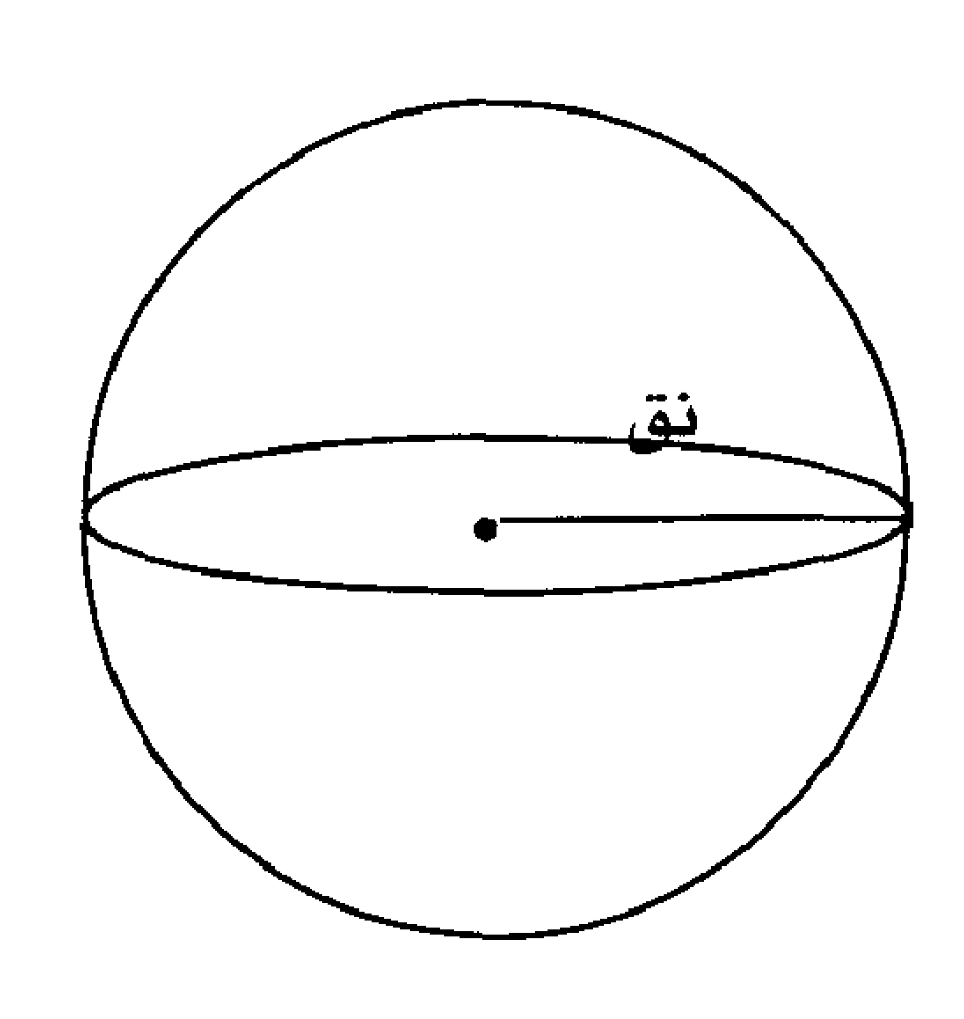
= $4\pi + 6\pi$

= $10\,\pi$ م$^2$

لاحظ أن الراسم يمثل القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المخروط وأقرب نقطة من محيط قاعدته.

**تدريب:** جد ارتفاع مخروط قائم مساحة سطحه $24\pi$ إنش$^2$ ونصف قطر قاعدته 3إنش.

◈ **مساحة سطح الكرة:**




الكرة: مجسّم يتولّد من دوران نصف دائرة حول قطرها.

مساحة سطح الكرة = $4\pi$ نق$^2$

**مثال:** جد مساحة سطح كرة نصف قطرها 7 مم.

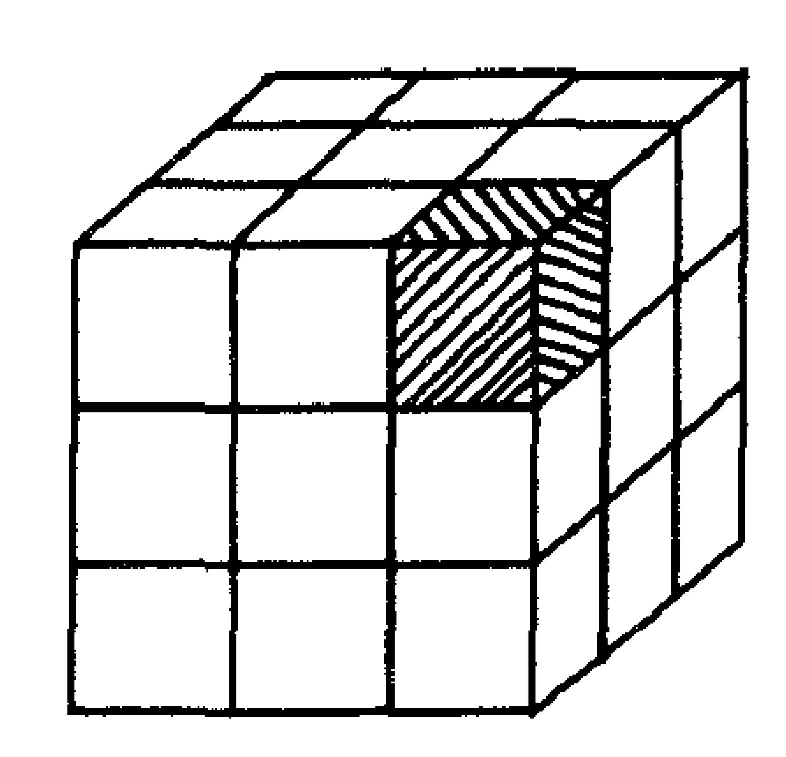
**الحل:** مساحة سطح الكرة = $4\pi\,(7)^2$

= $196\pi$ مم$^2$.



## 6 – 3 وحدات قياس الحجم وتطبيقاتها:

يعرّف الحجم على أنه عدد الوحدات المكعبة التي تشغل حيزاً ما، فمثلاً إذا تمّ تعبئة غرفة على شكل متوازي مستطيلات بمكعبات طول ضلعها 1 م واحتاجت الغرفة إلى (60) مكعباً لملئها دون ترك أيّ فراغ فيها، فإننا نقول أن حجم الغرفة = 60 م$^3$، لأن المكعب الواحد يشغل حيّزاً حجمه 1م$^3$ والذي يساوي 1م × 1م × 1م.



**مثال:** مكعب طول ضلعه 1 يارد احسب حجمه بالقدم.

**الحل:** نقسّم أبعاد المكعب إلى وحدات القدم فيكون:

1 يارد = 3 قدم.

نعدّ المكعبات الناتجة عن التقسيم فنجد أنها 27 مكعباً، وكلّ مكعب طول ضلعه 1 قدم، أي أن حجم المكعب = 27 قدم$^3$، وهذا يعني أن :

1يارد$^3$ =3 قدم × 3 قدم × 3 قدم = 27 قدم$^3$

**تدريب:** إذا كان طول ضلع المكعب 4 يارد، فما حجمه بالقدم؟

**مثال:** أكمل الفراغ فيما يلي:

1) 5 دسم$^3$ = ........................ سم$^3$
2) 135 قدم$^3$ =................. يارد$^3$
3) 23000 دكم$^3$=............... كم$^3$

**الحل:**

1) بما ان 1 دسم = 10 سم فإنّ 1 دسم3 = 10سم × 10سم × 10سم

أي انّ 1 دسم$^3$ = 1000 سم$^3$

∴ 5 دسم$^3$ = 5 × 1000 سم$^3$ = 5000 سم$^3$

2) بما ان 1 يارد = 3 قدم فإن 1 يارد$^3$ = 3 قدم × 3 قدم × 3 قدم

أي انّ 1 يارد$^3$ = 27 قدم$^3$

∴ 135 قدم$^3$ = 5 يارد$^3$

3) بما ان1كم =100 دكم فإنّ 1كم$^3$ =100دكم ×100دكم ×100دكم

أي انّ 1 كم$^3$ = 1000000 دكم$^3$

∴ 23000 دكم$^3$ = 0.230000 كم$^3$ = 0.23 كم$^3$

**تدريب: أكمل الفراغ فيما يلي:**

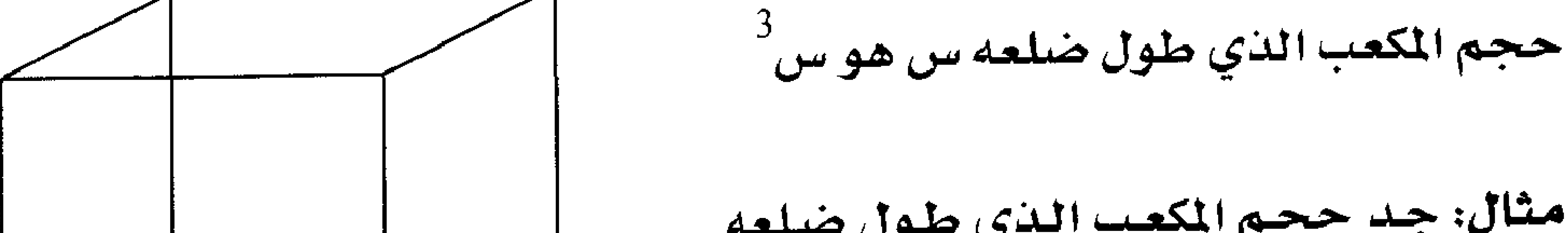
1) 7 قدم$^3$ = ................. إنش$^3$

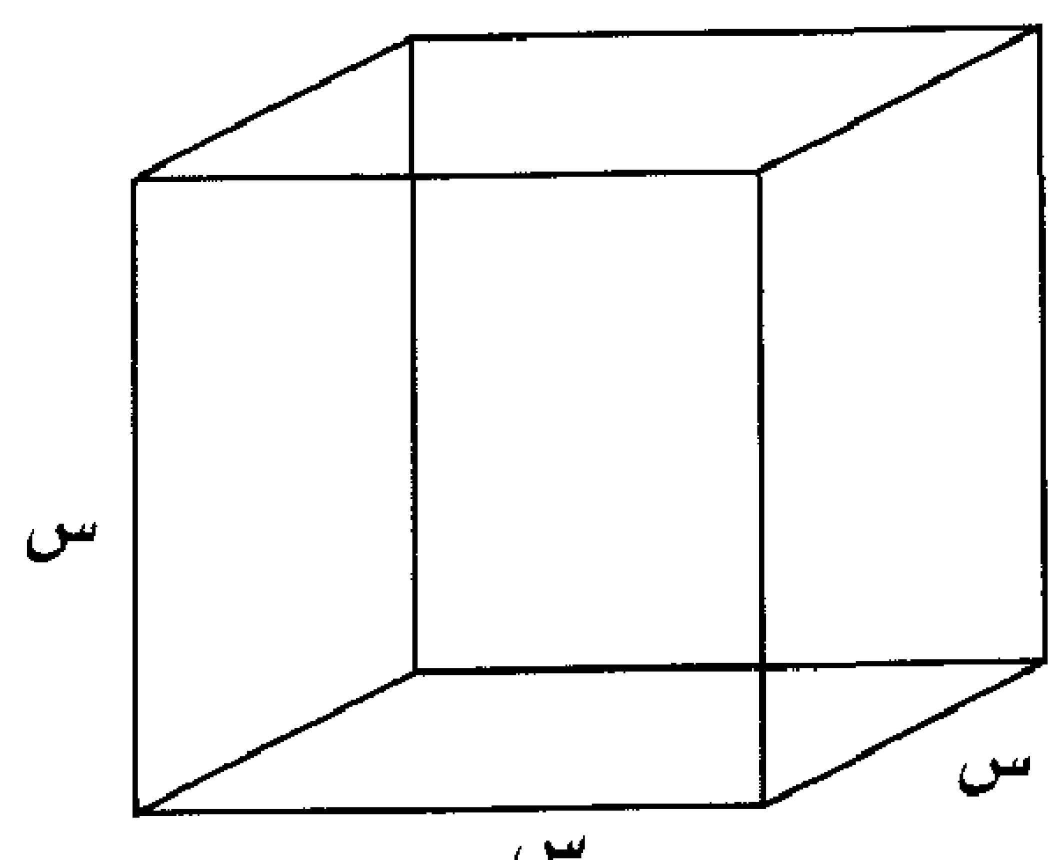
2) 478 مم$^3$ = ................ سم$^3$

3) 0.9 م$^3$ = .................. دسم$^3$

**تطبيقات على وحدات قياس الحجم:**

◈ **حجم المكعب:**



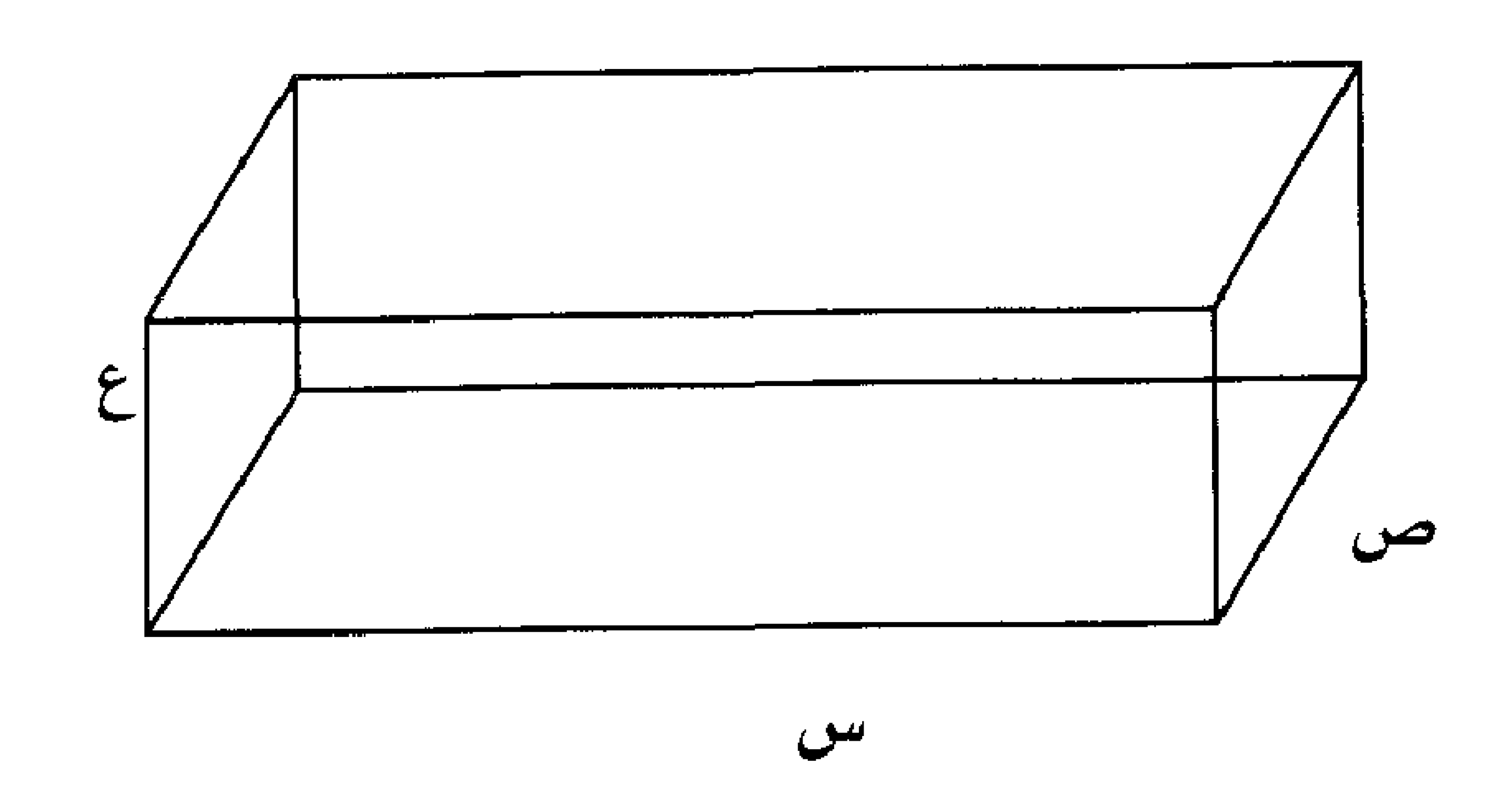



حجم المكعب الذي طول ضلعه س هو س$^3$

**مثال:** جد حجم المكعب الذي طول ضلعه 2سم.

**الحل:** حجم المكعب = $(2)^3$ = 8 سم$^3$

◈ **حجم متوازي المستطيلات:**




حجم متوازي المستطيلات الذي طول قاعدته س وعرضها ص وارتفاعه ع هو س × ص × ع

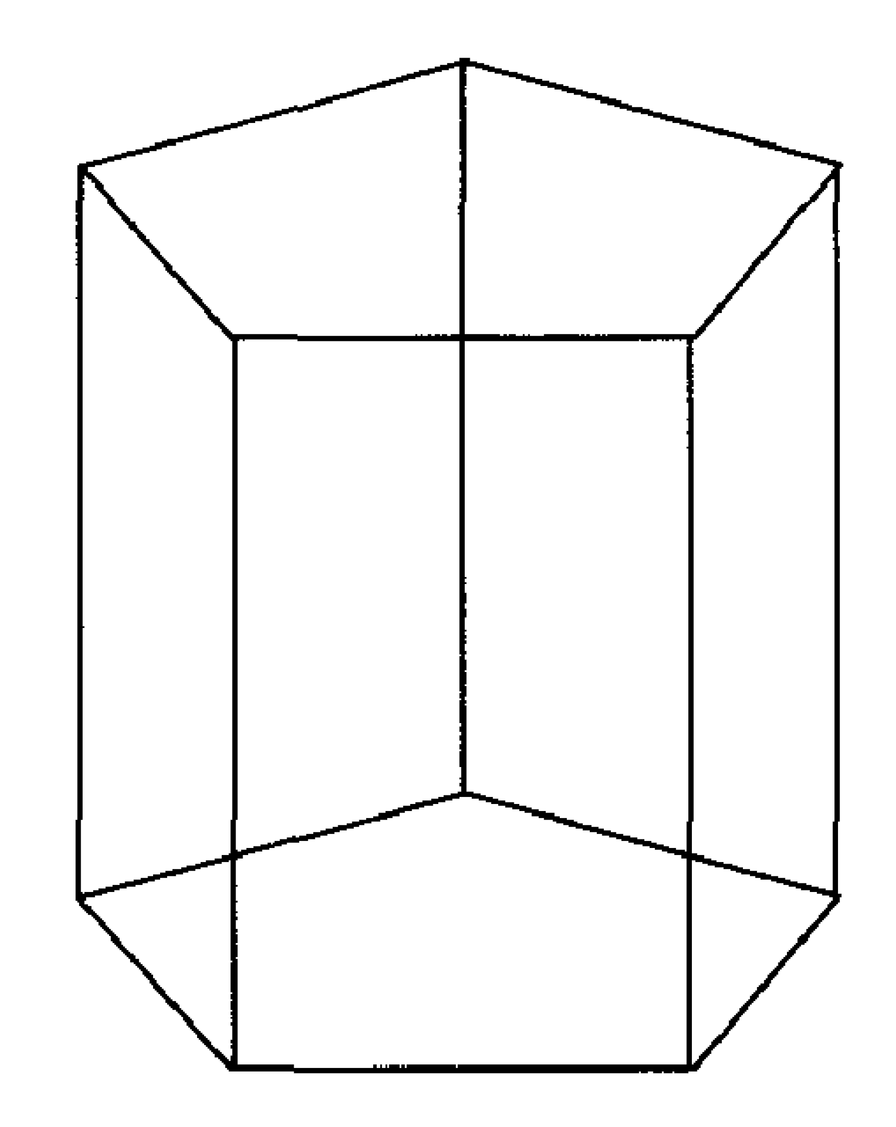
**مثال:**

جد حجم متوازي مستطيلات أبعاده 4 م، 3 م، 6 م

**الحل:**

**الحجم** = 4 × 3 × 6 = 72 م$^3$

◈ **حجم الموشور القائم:**



حجم الموشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

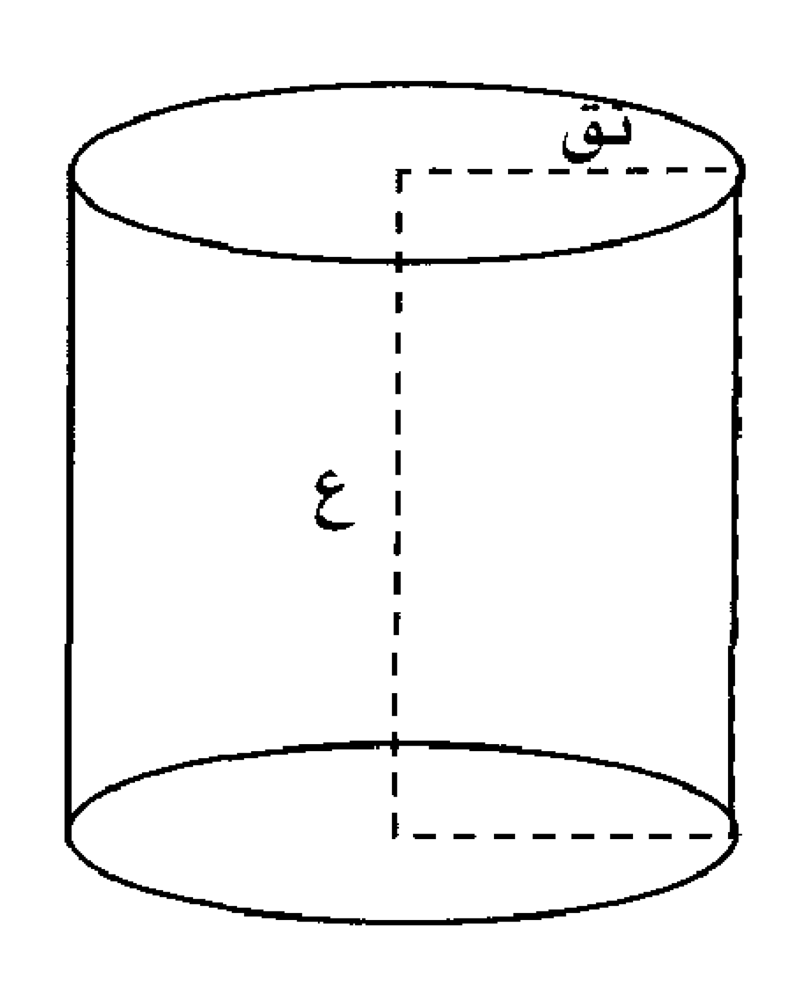
**مثال:** موشور خماسي مساحة قاعدته 30 دسم$^2$ وارتفاعه 4 دسم، احسب حجمه.

**الحل:** حجم الموشور = 30 × 4

= 120 دسم$^3$

**تدريب:** جد طول ضلع قاعدة موشور رباعي قاعدته مربعة الشكل وحجمه 100 إنش$^3$ وارتفاعه 4 إنش.

◈ **حجم الأسطوانة:**




حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

= π نق$^2$ ع

**مثال:** جد ارتفاع أسطوانة حجمها 45 π مم$^3$ ونصف قطر قاعدتها 3 مم.

**الحل:** حجم الأسطوانة = π نق$^2$ ع

45 π = π (3)$^2$ ع

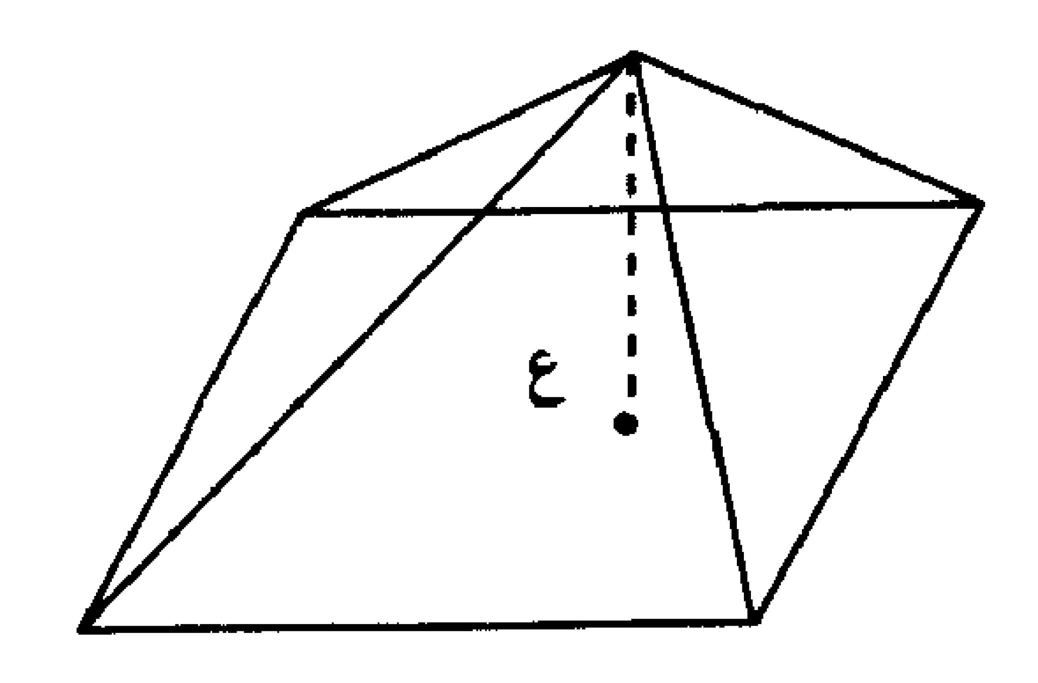
ع = 5 مم

**تدريب:** بئر ماء أسطواني الشكل نصف قطر قاعدته 4.5 م وارتفاعه 3 م، احسب حجمه.

### ◈ حجم الهرم القائم:

حجم الهرم القائم =

$\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع




**مثال:** هرم رباعي قائم قاعدته مربّعة طول ضلعها 12 سم وارتفاعه 6سم، احسب حجمه.

**الحل:** حجم الهرم = $\frac{1}{3} \times (12 \times 12) \times 6$

= 288 سم$^3$

**تدريب:** هرم قائم مشترك مع موشور قائم في القاعدة ولهما الارتفاع نفسه، ما العلاقة بين حجميهما؟

### ◈ حجم المخروط القائم:

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3}$ π نق$^2$ ع

**مثال:** مخروط قائم نصف قطر قاعدته 3 سم وارتفاعه 7 سم، احسب حجمه.

**الحل:** حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi\,(3)^2 \times 7$

= $21\,\pi$ سم$^3$

**تدريب:** مخروط قائم نصف قطر قاعدته 6 إنش وارتفاعه الجانبي 10 إنش، جد حجمه.

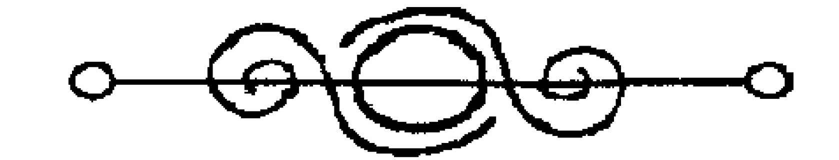
◈ **حجم الكرة:**

حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ نق$^3$

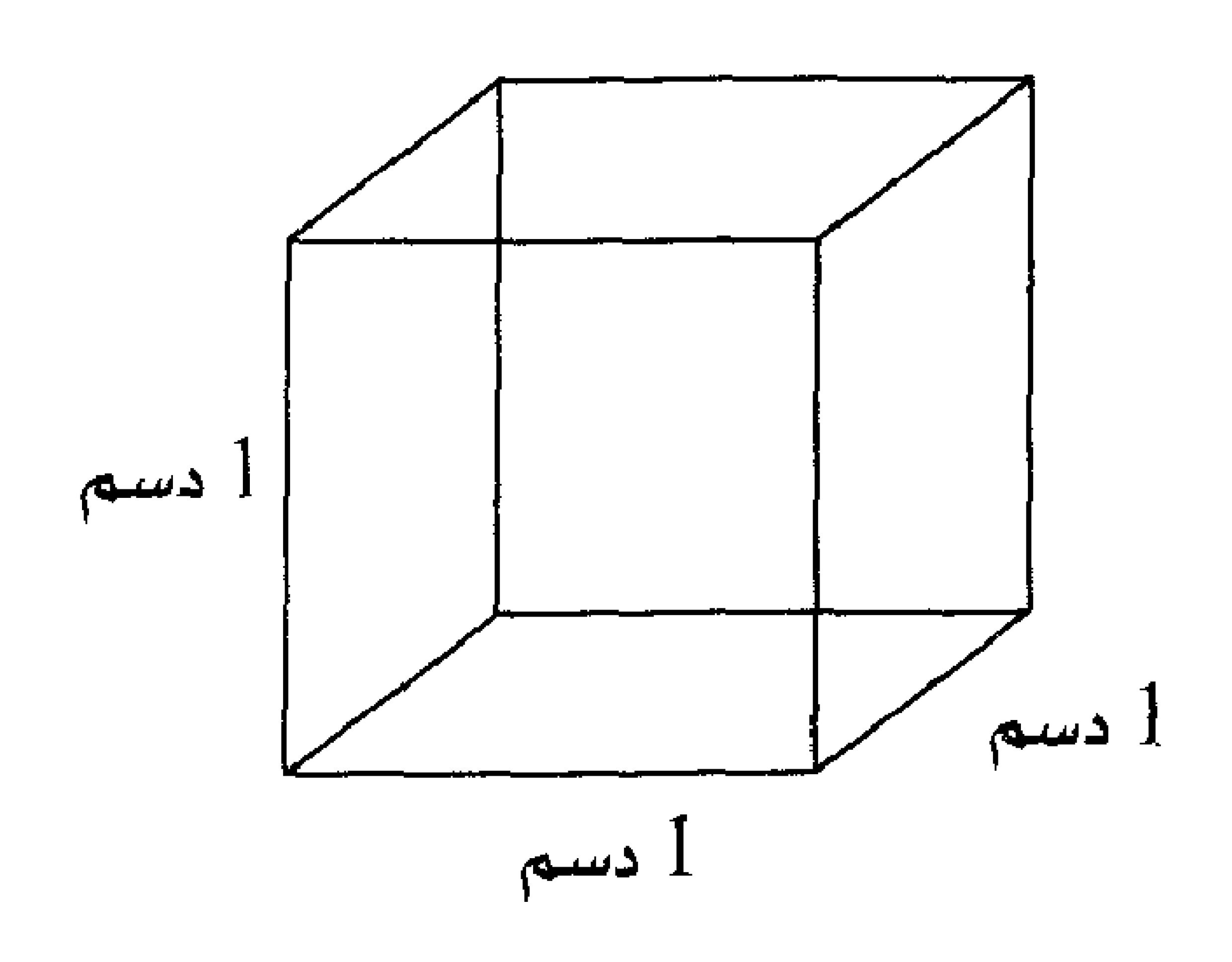
**مثال:** جد حجم كرة نصف قطرها 1 قدم.

**الحل:** حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi\,(1)^3$

= $\frac{4}{3}\pi$ قدم$^3$



## 6 – 4 وحدات قياس السعة وتطبيقاتها




تقاس سعة الأشياء بوحدة أساسية هي اللتر، ويستخدم لقياس حجم المواد السائلة، فمثلاً تقاس كمية الزيت في عبوة زجاجية أو بلاستيكية بوحدة اللتر.

واللتر هو كمية المادة التي يتسع لها مكعب طول ضلعه 1 دسم، أي أن:

اللتر = 1 دسم$^3$

والمللتر (ملل) هو كمية المادة التي يتسع لها مكعب طول ضلعه 1 سم

أي أن المللتر = 1سم$^3$

وبما أن 1 دسم$^3$ = 1000 سم$^3$ فإن:

اللتر = 1000 مللتر.

والكيلولتر هو كميّة المادة التي يتسع لها مكعب طول ضلعه 1 م، أي أن:

الكيلولتر = 1م$^3$ = 1000 دسم$^3$ = 1000 لتر.

**مثال:** أكمل الفراغ فيما يلي:

1) 3 دسم$^3$ = ........................ لتر
2) 2.3 لتر = ........................ ملل
3) 1.7 كيلولتر= ..................... دسم3

**الحل:**

1) بما أن 1 دسم$^3$= 1 لتر فإن 3 دسم$^3$ = 3 لتر.
2) بما أن اللتر = 1000 ملل فإن 2.3 لتر = 2300 ملل.
3) بما أن الكيلولتر = 1000 دسم3 فإن 1.7 كيلولتر = 1700 دسم$^3$

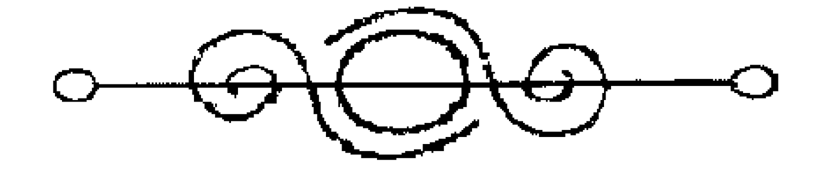
**مثال:** خزان ماء على شكل متوازي مستطيلات أبعاده 3 م، 2 م، 3 م احسب سعة الخزان باللترات.

**الحل:** حجم الخزان = 3 م × 2 م × 3 م = 18 م$^3$

لكن 1 م$^3$ = 1000 دسم$^3$= 1000 لتر

∴ سعة الخزان = 18 × 1000 = 18000 لتر

**تدريب:** عبوة حليب سائل على شكل أسطوانة نصف قطر قاعدتها 6 سم، وارتفاعها 20 سم، احسب سعة العبوة باللترات. (اعتبر π = 3.14)



## 6 – 5 وحدات قياس الكتلة وتطبيقاتها :

الكتلة هي مقدار ما يحتوي الجسم من مادة، والوحدة الأساس لقياس الكتلة هي الغرام (غ) والذي يساوي كتلة 1 سم$^3$ من الماء.

ومن الوحدات الشائعة في قياس الكتلة:

- في النظام الفرنسي:

الكيلوغرام (كغ) ويساوي 1000 غ، والملغرام (ملغ) ويساوي $\frac{1}{1000}$غ، والطن المتري (طن) ويساوي 1000 كغ.

- وفي النظام الإنجليزي:

الباوند = 16 أونصة وتساوي 453.6 غ.

**مثال:** أكمل الفراغ فيما يلي:

1) 2900 غ = ............كغ
2) 4.5 غ = ..............ملغ
3) 10 كغ = ............باوند
4) 1 أونصة =...........غ

**الحل:**

1) بما أن 1 كغ = 1000 غ، فإن 2900 غ = 2.9 كغ
2) بما أن 1 غ = 1000 ملغ، فإن 4.5 غ = 4500 ملغ
3) بما ان 1 كغ = 1000 غ، فإن:

$$10 \text{ كغ } = \frac{10000}{453.6} = 202 \text{ باوند}$$

4) بما أن 1 أونصة = $\frac{1}{16}$ باوند، فإن:

1 أونصة = $\frac{1}{16} \times 453.6 = 28.35$ غ

**مثال:** صندوق مكعب الشكل طول ضلعه 50 سم، مملوء بصناديق صغيرة مكعبة الشكل ومتساوية في الكتلة، طول ضلع كل منها 5 سم، إذا كانت كتلة الصندوق الصغير 120 غ، ما كتلة الصناديق الصغيرة جميعها بالكيلوغرام؟

**الحل:**

حجم المكعب الكبير = $(50)^3 = 125000$ سم$^3$

حجم المكعب الصغير = $(5)^3 = 125$ سم$^3$

عدد المكعبات الصغيرة = $\frac{125000}{125} = 1000$ مكعب

أي أنه يوجد 1000 صندوق صغير داخل الصندوق الكبير

وبما أن كتلة الصندوق الصغير الواحد = 120 غ، فإن:

كتلة الصناديق الصغيرة جميعها = $1000 \times 120 = 120000$ غ

= 120 كغ

**تدريب:** إذا كان وزن الجسم يساوي مقدار جذب الأرض له، أي أن:

الوزن = الكتلة × تسارع الجاذبية الأرضية، فما وزن رجل كتلته 75 كغ؟

(اعتبر تسارع الجاذبية الأرضية = 9.8 م/ث$^2$).

## 6 – 6 وحدات قياس درجة الحرارة وتطبيقاتها

تقاس درجة الحرارة بوحدة الدرجة، ويوجد مقياسان هما الفهرنهايتي (ف)، والمئوي (س) والقاعدة التي تحكم العلاقة بين المقياسين هي:

ف = $\frac{9}{5}$ س + 32° أو س = $\frac{5}{9}$ ( ف – 32°)

**مثال:** إذا كانت درجة تجمد الماء في المقياس المئوي هي (0°)، فما درجة تجمد الماء في المقياس الفهرنهايتي؟

**الحل:** ف = $\frac{9}{5}$ (0°) + 32° = 32°

**مثال:** إذا كانت درجة غليان الماء في المقياس الفهرنهايتي هي (212°)، فما درجة غليان الماء في المقياس المئوي؟

**الحل:** س = $\frac{5}{9}$ ( 212° – 32°) = 100°

**تدريب:** حوّل 50° ف إلى درجات سلسيوسية.

**تدريب:** ما التدريج الحراري الذي يكون فيه القياس الفهرنهايتي مثلي القياس المئوي؟



## 6 – 7 وحدات قياس الزمن وتطبيقاتها

يقاس الزمن بوحدات مختلفة، وفيما يلي ملخّصاً لبعض الوحدات والعلاقات بينها:

| الوحدة | العلاقة مع الوحدات الأخرى |
|---|---|
| الدقيقة | 60 ثانية |
| الساعة | 60 دقيقة |
| اليوم | 24 ساعة |
| الأسبوع | 7 أيام |
| الشهر | 28 يوماً في شهر شباط(*) بالتقويم الميلادي<br>30 – 31 يوماً في باقي شهور السنة الميلادية<br>29 – 30 يوماً في شهور السنة الهجرية |
| السنة | 12 شهراً |
| | (*) يضاف يوم واحد لشهر شباط في السنة الكبيسة ويصبح عدد الأيام 29 يوماً |

**مثال:** استغرق أحمد 150 دقيقة في القيام بواجباته الدراسية، كم الزمن الذي استغرقه بالساعات؟

**الحل:** الزمن بالساعات = $\frac{150}{60}$ = 2.5 ساعة.

**مثال:** بدأ برنامج تلفزيوني الساعة الثامنة وأربعين دقيقة مساءً، وانتهى في الساعة التاسعة وخمس وخمسين دقيقة مساءً، كم الزمن الذي استغرقه البرنامج؟

**الحل:**

| د | | س | | د | | س | | د | | س |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | : | 9 | – | 40 | : | 8 | = | 15 | : | 1 |

أي أن الزمن المستغرق = ساعة و15 دقيقة

**مثال: كم دقيقة في الأسبوع؟**

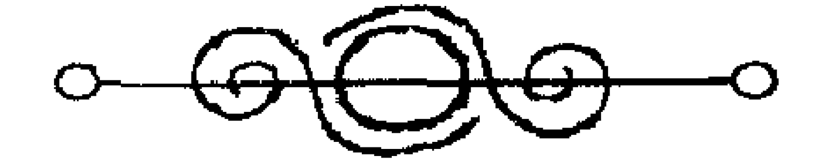
**الحل:** الأسبوع = 7 أيام

= 7 × 24 ساعة = 168 ساعة

= 168 × 60 = 10080 دقيقة

**تدريب: كم ساعة في شهر حزيران الذي عدد أيامه 30 يوماً؟**

**تدريب: سافر رجل للعمل خارج البلاد ، وعاد بعد 27 شهراً، ما الزمن الذي قضاه الرجل في الخارج بالسنوات؟**



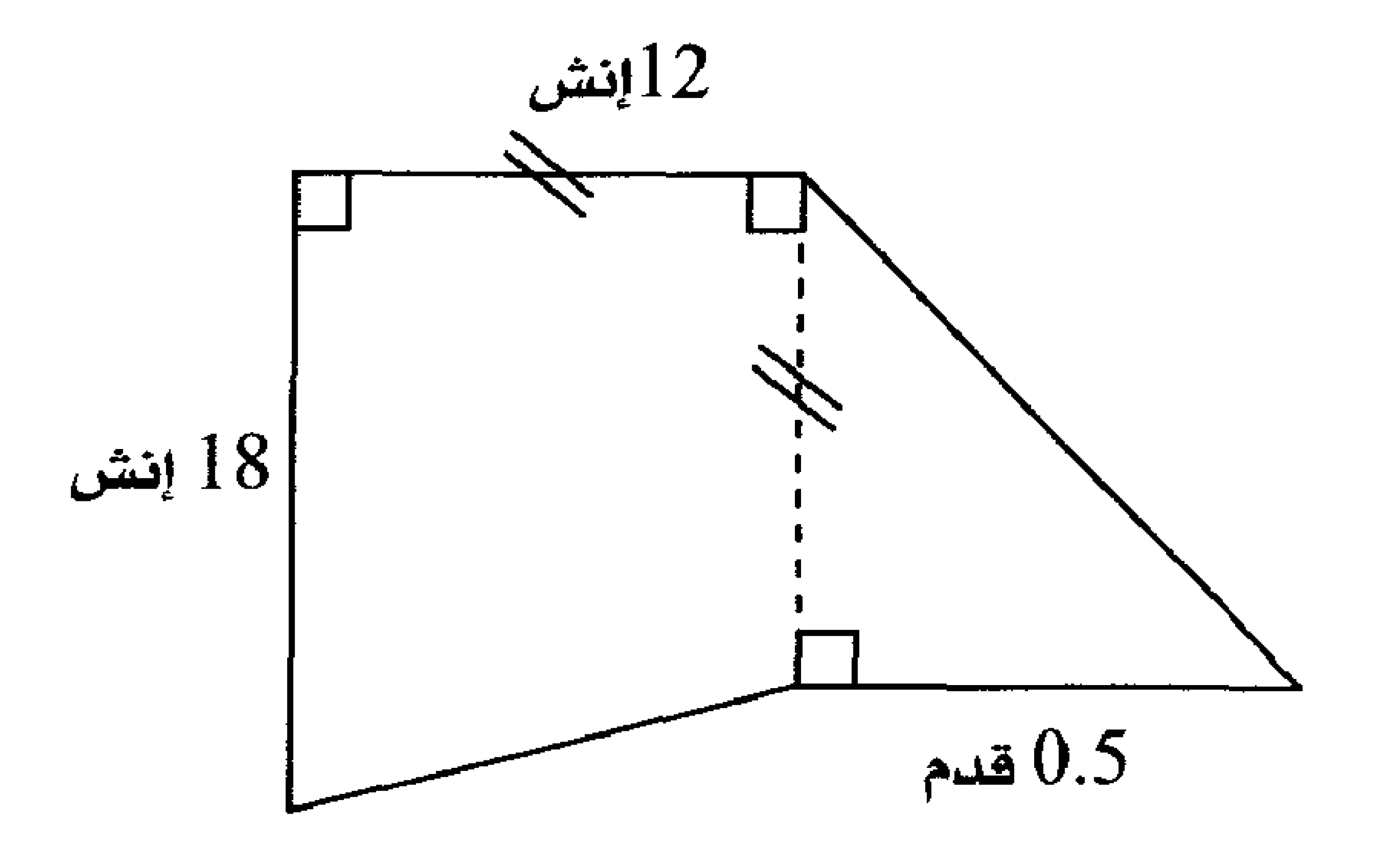
## 6-8 أسئلة للمناقشة:

1. أكمل الفراغ فيما يلي:

1) 34 م = ........................... سم
2) 178 إنش = ...................... قدم
3) 2 دكم$^2$ = ......................... م$^2$
4) 0.7 يارد$^2$ = ...................... قدم$^2$
5) 1352 مم$^3$ = ...................... سم$^3$
6) 2 قدم$^3$ = .......................... إنش$^3$
7) 78 مللتر = ........................ سم$^3$
8) 4015 سم$^3$ = ...................... لتر
9) 3.7 كغ = .......................... غ
10) 189014 ملغ = ................ كغ
11) 58° م = .......................... ف
12) 16 ساعة = ...................... ثانية

2. مزرعة مثلثة الشكل أبعادها 50 م، 80 م، 70 م، يراد وضع سياج حولها، إذا كان ثمن المتر الواحد من السياج 10 دنانير، احسب ثمن السياج.

3. جد مساحة الشكل المجاور



4. تستخدم في مساحات الأراضي وحدة تسمى الدونم وتساوي 1000 م$^2$، إذا كانت أرض مستطيلة الشكل طولها 130 م وعرضها 90 م، احسب مساحتها بالدونمات.

5. صندوق شاحنة على شكل متوازي مستطيلات أبعاده 2 م، 3 م، $\frac{1}{2}$ م، مملوء بالرمل، تمّ تفريغه في حفرة أسطوانية الشكل قطر قاعدتها 3 م، احسب ارتفاع الرمل في الحفرة.

6. أنتج مصنع 150 لتراً من العصير وأراد تعبئته في علب على شكل مخروط قائم نصف قطر قاعدته 4 سم وارتفاعه 10 سم، احسب عدد العلب الممكن تعبئتها بالعصير.

7. إذا كانت كتلة حبّة البرتقال 150 غ، وكان الصندوق يحتوي على 23 حبّة برتقال، وكانت كتلة الصندوق فارغاً 200غ، احسب كتلة الصندوق بما يحتوي من حبّات البرتقال.

8. قاس خالد درجة الحرارة يوم الثلاثاء فكانت ($22^\circ$ س)، وفي الوقت نفسه من اليوم التالي قاس خالد درجة الحرارة فكانت ($60^\circ$ ف)، في أي اليومين كان الجو أكثر حرارة؟

9. أنجز رجل دهان عمله في 8 ساعات، فحصل على مبلغ 45 ديناراً، وأعطى العامل 13 ديناراً، كم صافي المبلغ الذي يحصل عليه في الساعة الواحدة؟

## الفصل السابع

# الدائرة ونظرياتها

7 – 1 مفاهيم أساسية في الدائرة

7 – 2 الزاوية المحيطية والزاوية المركزية

7 – 3 العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر

7 – 4 خط المركزين والوتر المشترك لدائرتين

7 – 5 الأوتار المتقاطعة

7 – 6 الشكل الرباعي الدائري

7 – 7 مماس الدائرة والزاوية المماسية

7 – 8 أسئلة للمناقشة

# الفصل السابع

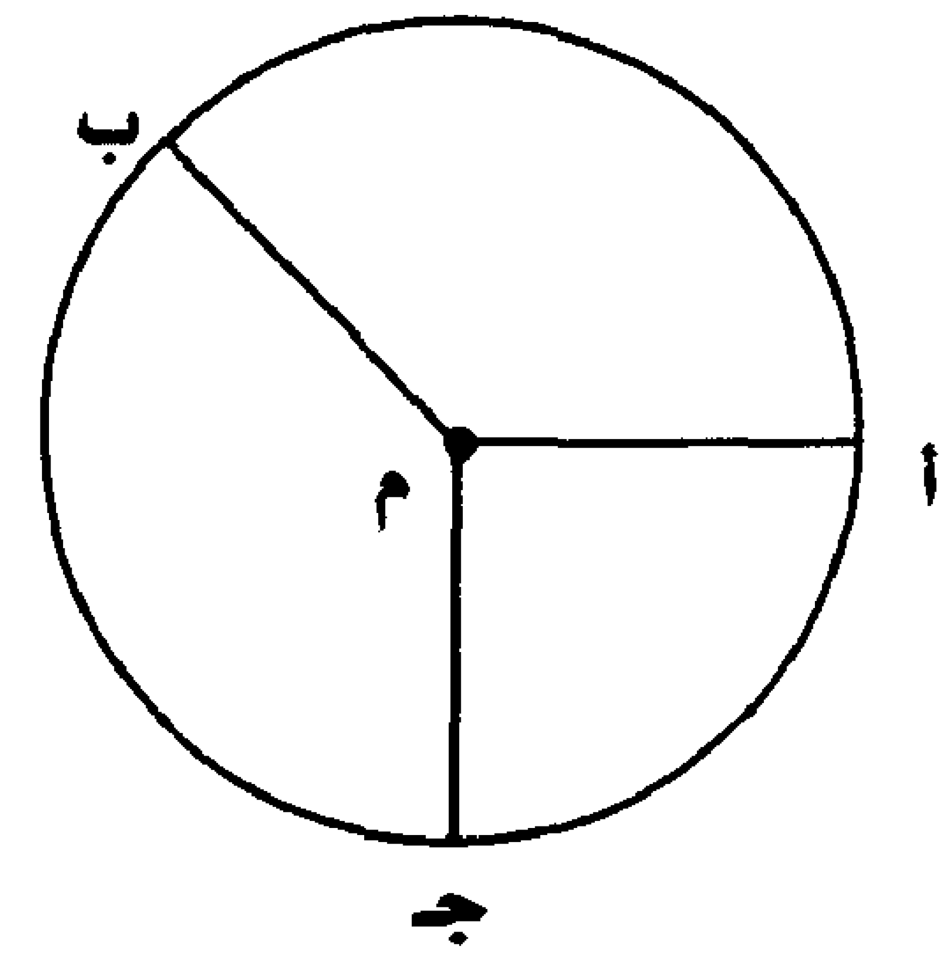
# الفصل السابع
# الدائرة ونظرياتها

## 7 – 1 مفاهيم أساسية في الدائرة:

الدائرة هي مجموعة النقط في المستوى التي تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة. تسمّى النقطة الثابتة مركز الدائرة، ويسمّى البعد الثابت نصف قطر الدائرة.

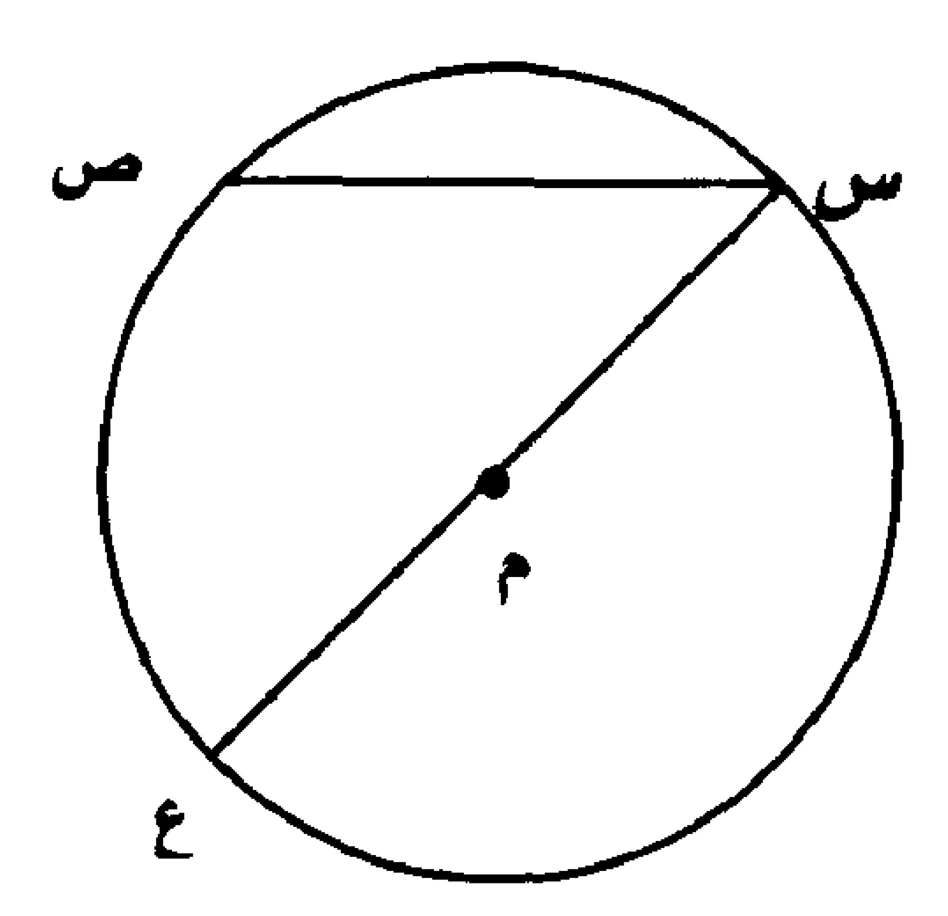
وفيما يلي عرضاً لبعض المفاهيم الأساسية في الدائرة:

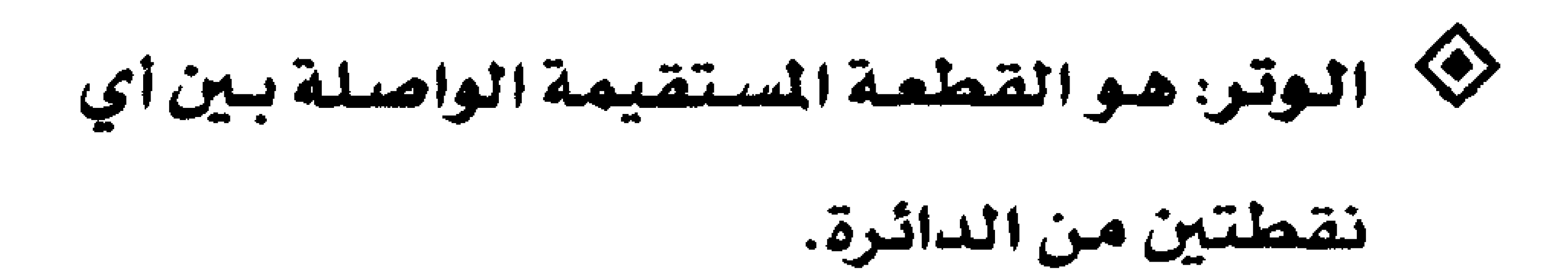
◈ **نصف قطر الدائرة:** هو القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الدائرة إلى أي نقطة من نقاطها.




**مثال:** في الشكل المجاور يكون مركز الدائرة (م)، وكل من م أ، م ب، م جـ يسمّى نصف قطر للدائرة.

**ملاحظة:** أنصاف أقطار الدائرة متساوية أي أن م أ = م ب = م جـ



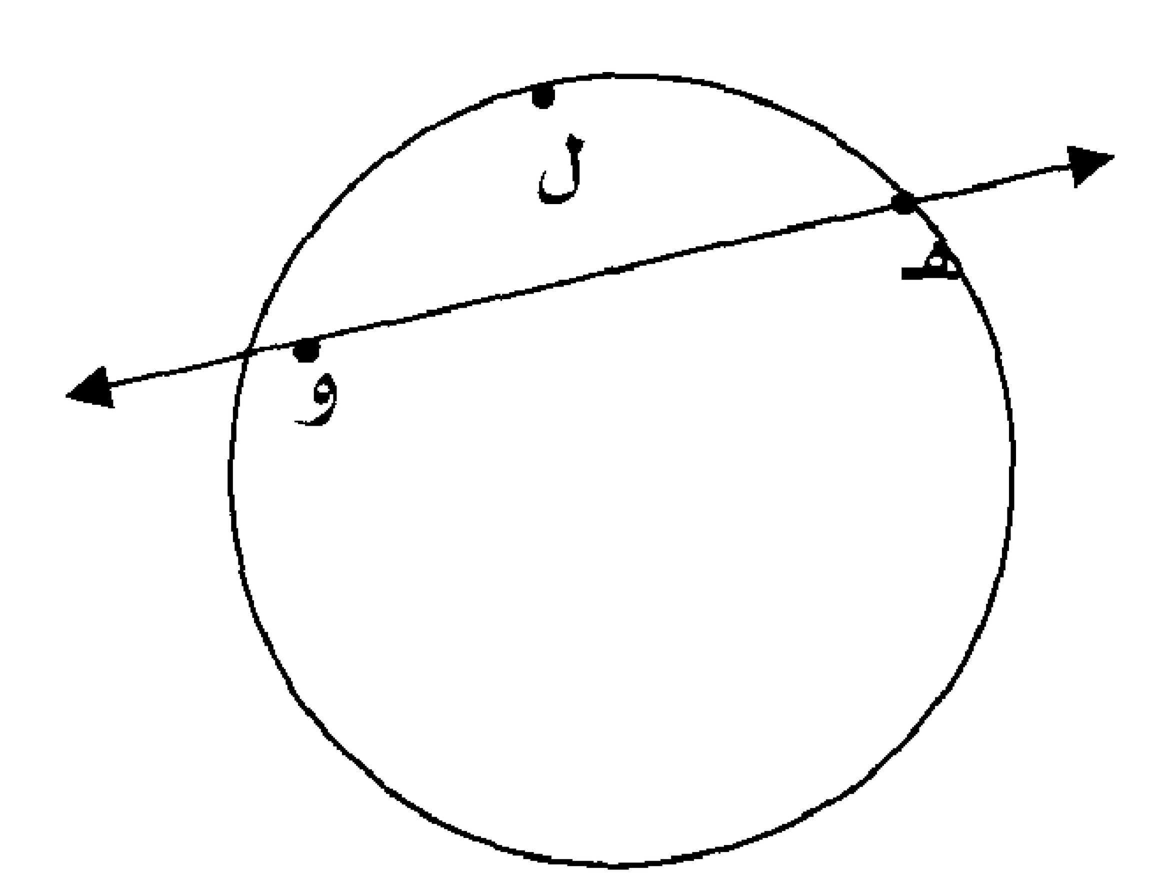
◈ **الوتر:** هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين من الدائرة.

**مثال:** في الشكل المجاور يكون كل من: س ص، س ع وتراً للدائرة.

# الفصل السابع

◈ **القطر:** هو وتر للدائرة مار في المركز، وهو أطول أوتار الدائرة.

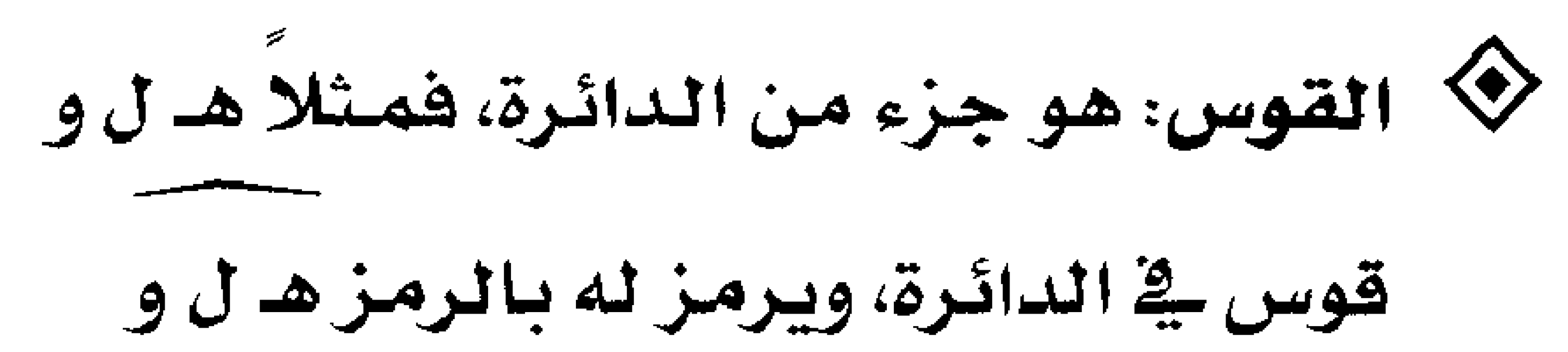
**مثال:** في الشكل السابق يكون س ع قطراً للدائرة.



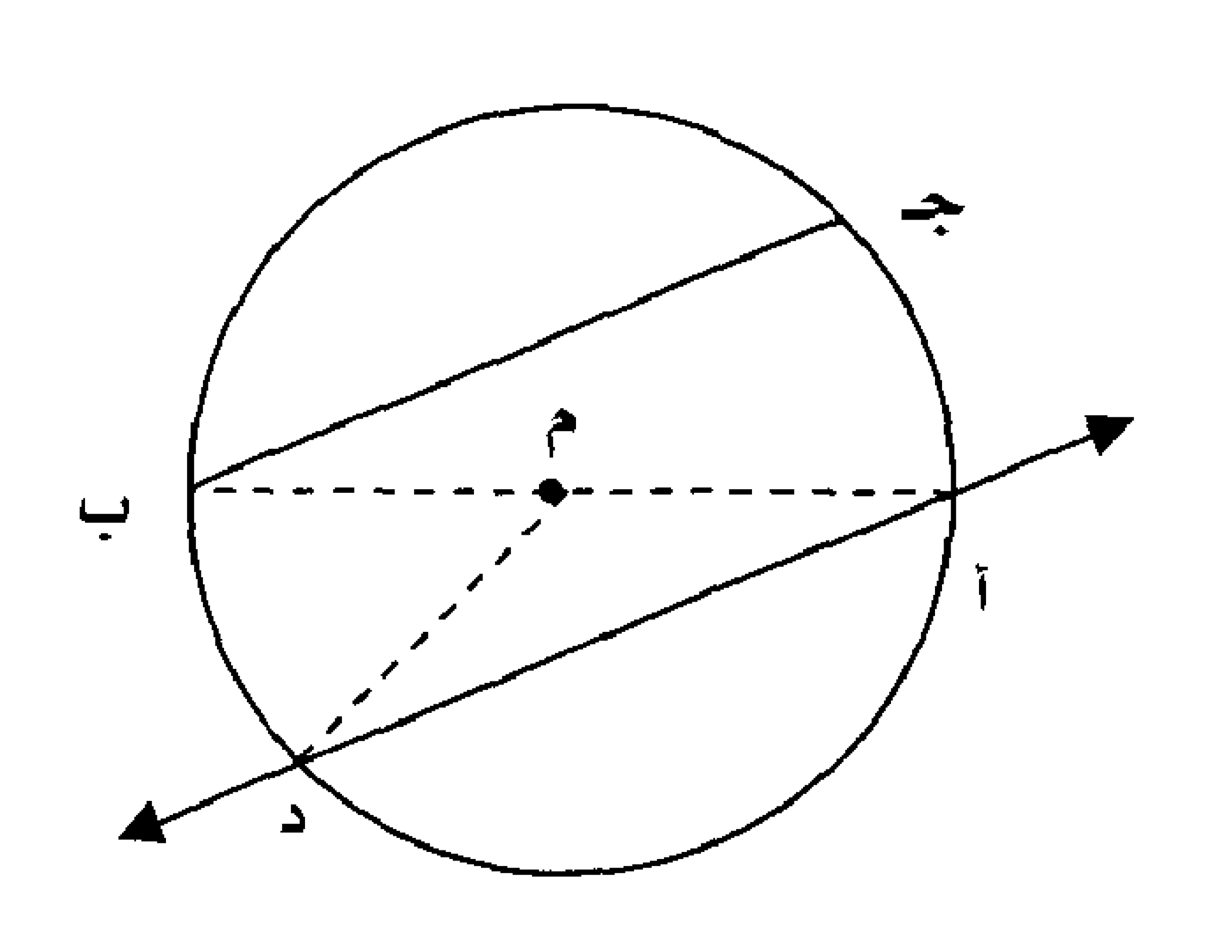

◈ **القاطع:** هو مستقيم يحتوي على وتر في الدائرة.

**مثال:** في الشكل المجاور يكون هـ و قاطعاً للدائرة.

◈ **القوس:** هو جزء من الدائرة، فمثلاً هـ ل و قوس في الدائرة، ويرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{هـ ل و}}$

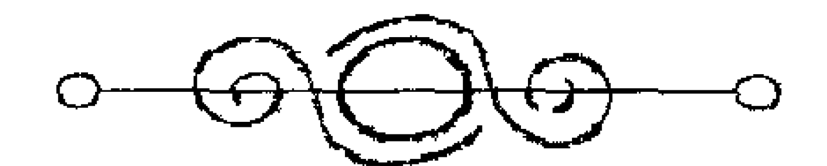


**تدريب:** اعتمد على الشكل المجاور في الإجابة عمّا يأتي:

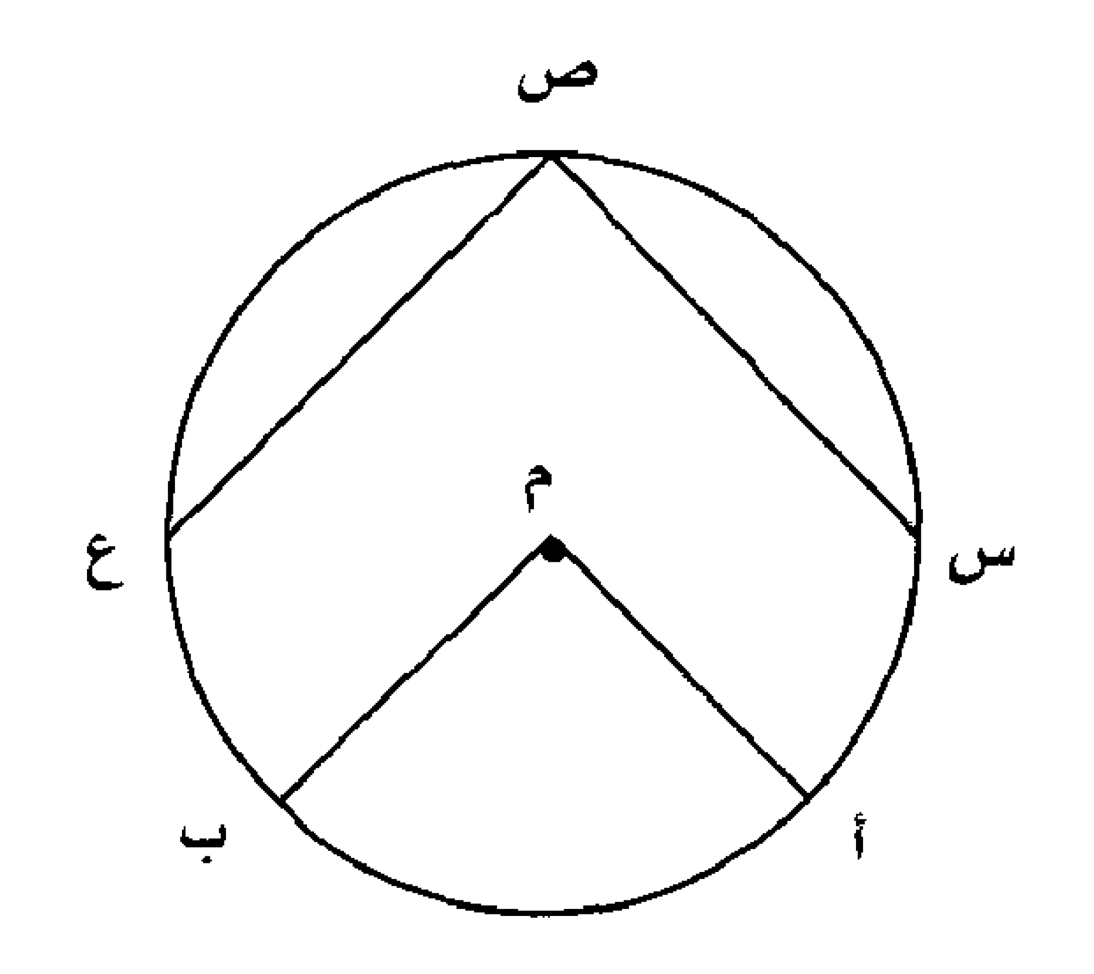



1) سمّ ثلاثة أنصاف أقطار للدائرة.
2) أعطِ مثالاً لوتر في الدائرة ليس قطراً.
3) أعطِ مثالاً لوتر في الدائرة يكون قطراً فيها.
4) أعطِ مثالاً لقاطع في الدائرة.
5) ما العلاقة بين طولي ب جـ، ب أ؟
6) ما العلاقة بين طولي م أ، م د؟
7) عيّن أربعة أقواس.

**تدريب:** دائرة مركزها م، نصف قطرها 6 سم، م س، م ص نصفا قطرين متعامدين، جد طول س ص.

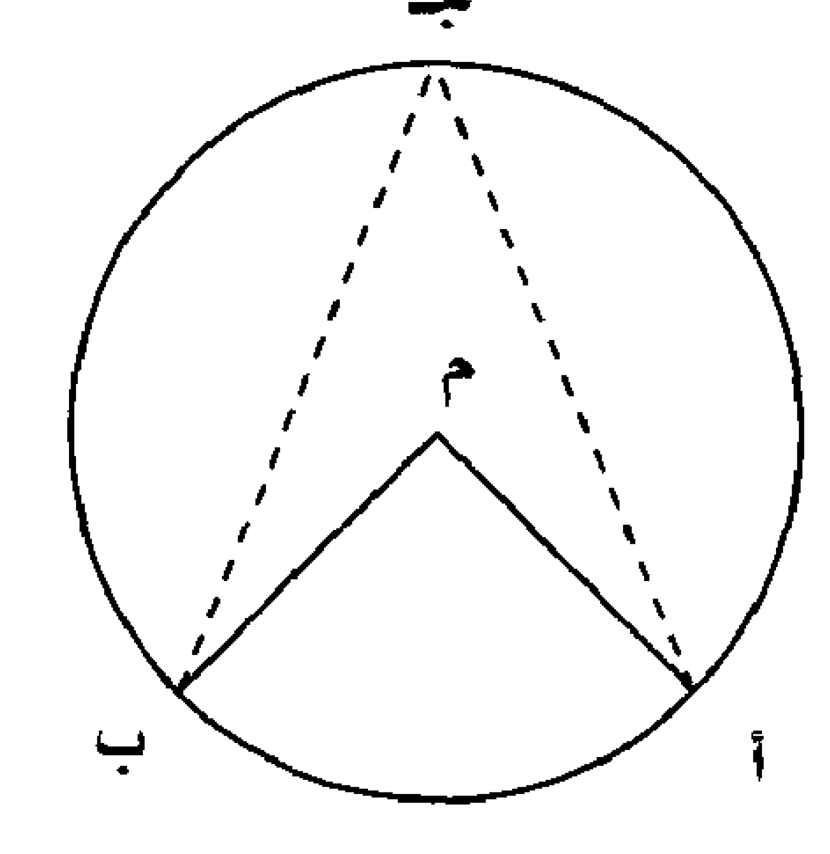


## 7-2 *الزاوية المحيطية والزاوية المركزية:*




◈ يحتوي ضلعا الزاوية أ م ب في الشكل المجاور على نصفي قطرين، ويقع رأسها في مركز الدائرة، وتسمّى هذه الزاوية بالزاوية المركزية للدائرة، أي أن الزاوية المركزية للدائرة هي الزاوية التي يقع رأسها في مركز الدائرة وضلعاها نصفا قطرين.

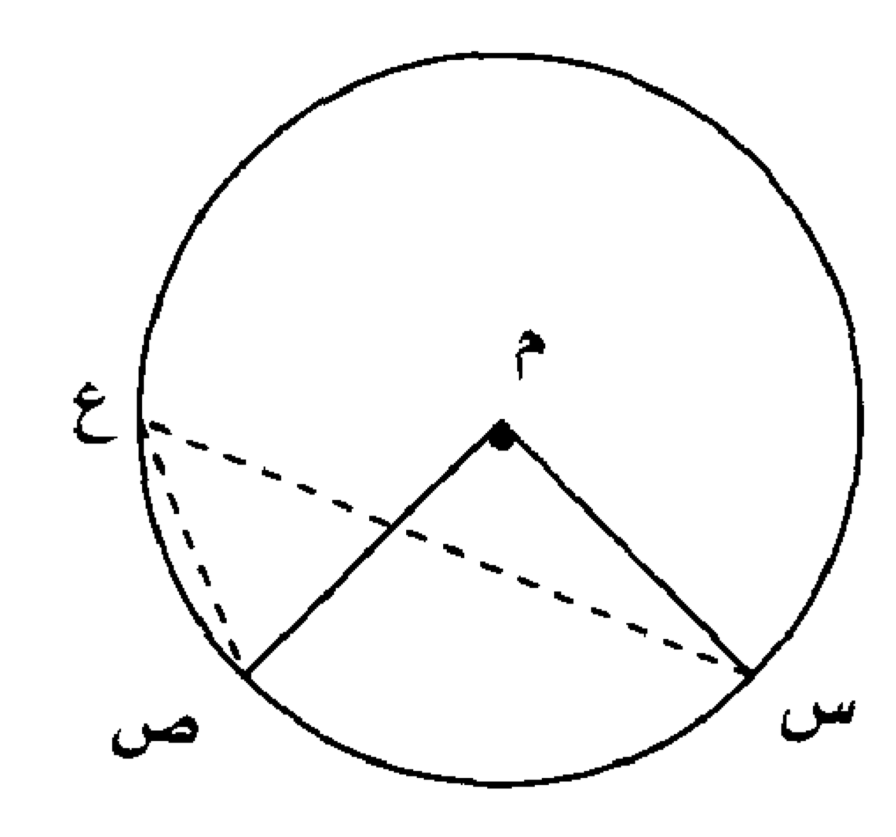
◈ ويحتوي ضلعا الزاوية س ص ع في الشكل السابق على وترين، ويقع رأسها على الدائرة، وتسمّى هذه الزاوية بالزاوية المحيطية للدائرة، أي أن: الزاوية المحيطية للدائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة وضلعاها وتران.




◈ العلاقة بين الزاوية المحيطية والزاوية المركزية:

- **نظرية:** الزاوية المركزية تساوي مثلي الزاوية المحيطية المرسومة معها على القوس نفسه وبالرموز: ∢ أ م ب = 2 ∢ أ جـ ب


**تدريب:** أثبت النظرية السابقة




**مثال:** إذا كانت ∢ س ع ص = 30°، فما قيمة ∢ س م ص؟

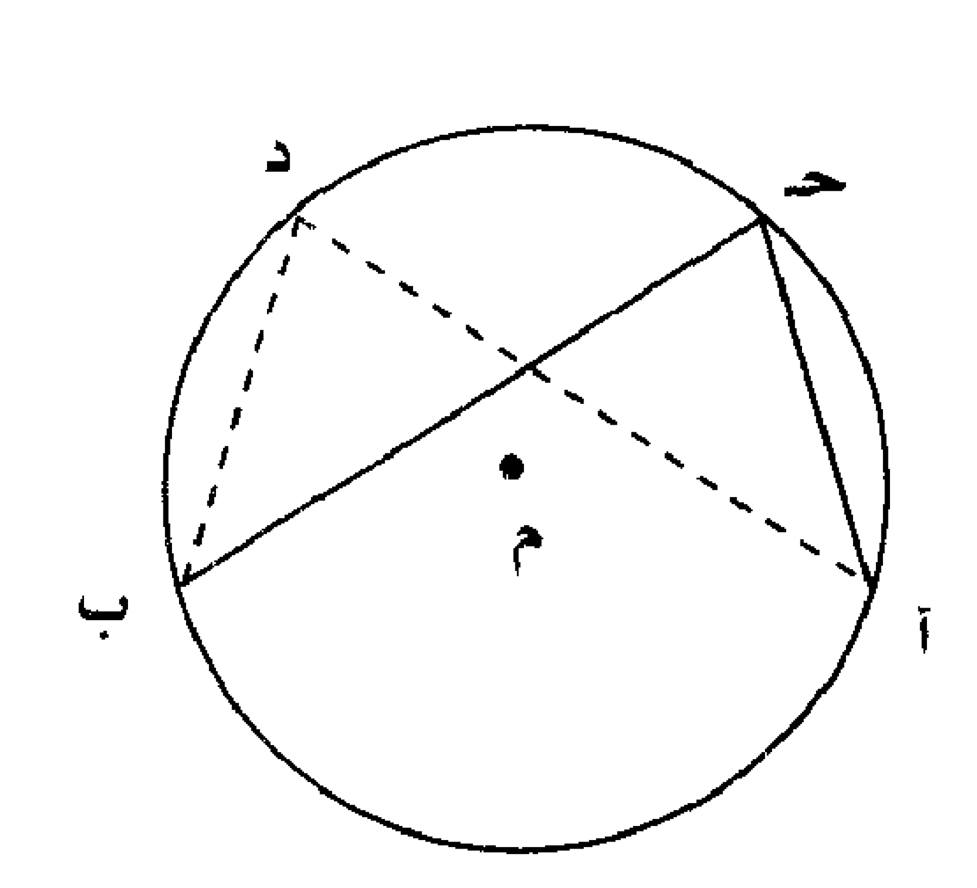
**الحل:** ∢س م ص مركزية مشتركة مع ∢س ع ص المحيطية في القوس س ص، لذا فإن:

∡ س م ص = 2 ∡ س ع ص

$= 2 \times 30°$

$= 60°$

- **نظرية:** الزاويتان المحيطيتان المرسومتان على قوس واحد في الدائرة متساويتان.




وبالرموز:

∡ أ جـ ب = ∡ أ د ب

**البرهان:** ∡ أ م ب مركزية مشتركة مع

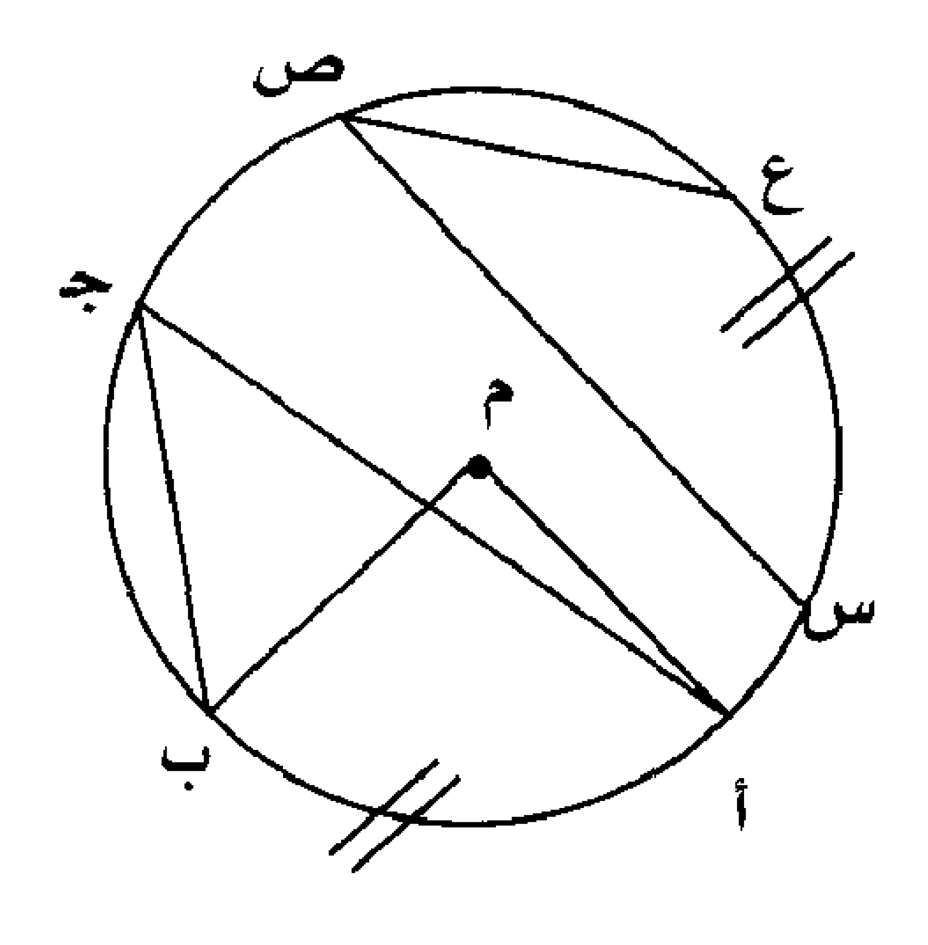
∡ أ جـ ب المحيطية في القوس أ ب، أي أن: ∡ أ م ب = 2 ∡ أ جـ ب ..........(1)

∡ أ م ب مركزية مشتركة مع ∡ أ د ب المحيطية في القوس أ ب، أي أن:

∡ أ م ب = 2 ∡ أ د ب..............(2)

من (1) و(2) ينتج أن:

∡ أ جـ ب = ∡ أ د ب




**ملاحظة:** إذا رسمنا زاويتين محيطيتين على قوسين متساويين في الدائرة، تكون الزاويتان متساويتين.

**مثال:** إذا كان القوس أ ب يساوي القوس س ع ، ∡ أ م ب = 50°، جد قياس كل من:
∡ أ جـ ب، ∡ ع ص س.

**الحل:** ∡ أ م ب مركزية تشترك مع

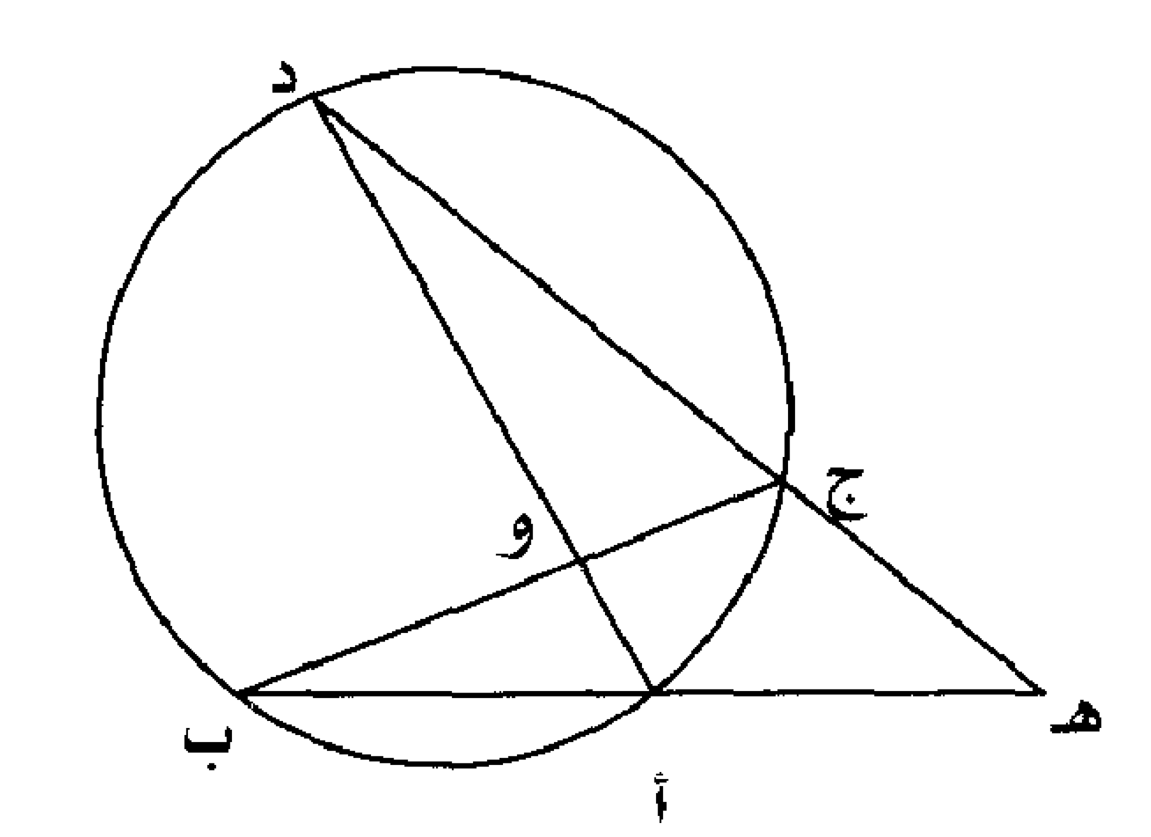
∡ أ جـ ب المحيطية في القوس أ ب، أي أن:

∡ أ جـ ب = $\frac{1}{2} \times 50° = 25°$.

بما أن ∡ ع ص س، ∡ أ جـ ب محيطيتان على قوسين متساويين، فإنهما متساويتان

∴ ∡ ع ص س = 25°.

**تدريب:** في الشكل المجاور، إذا كانت:

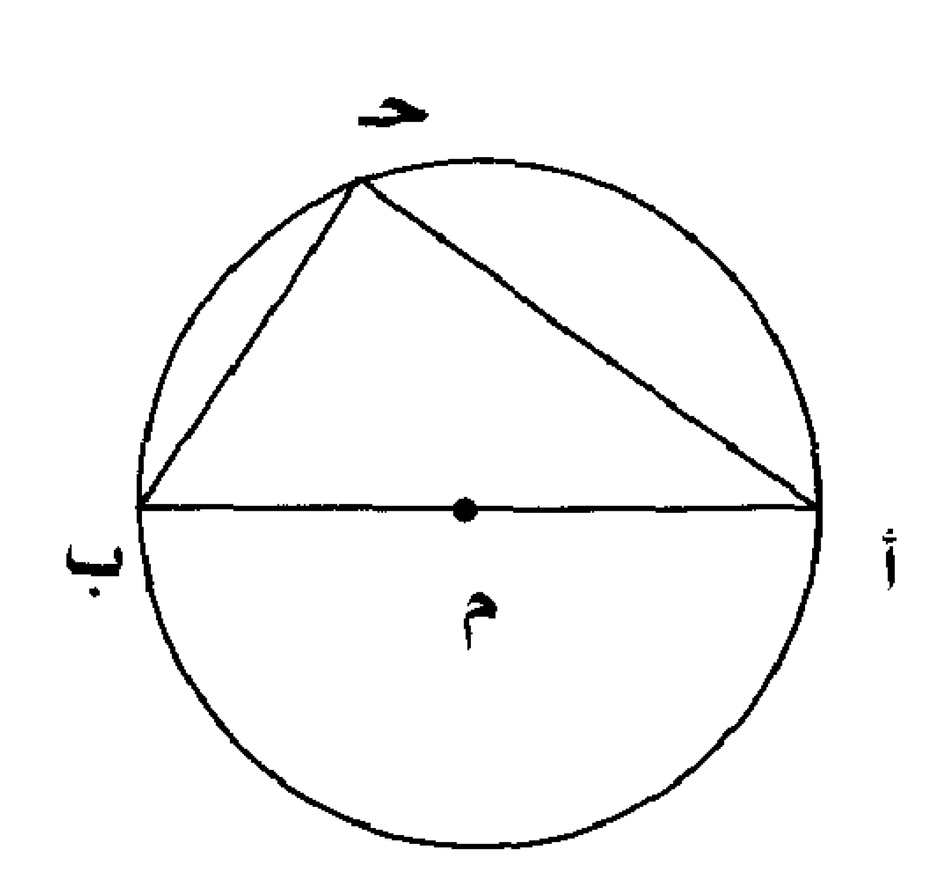



∡ أ ب جـ = 20°

∡ جـ هـ أ = 25°، جد:

1) ∡ د أ ب
2) ∡ د و ب

- **نظرية: الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة تساوي 90°.**



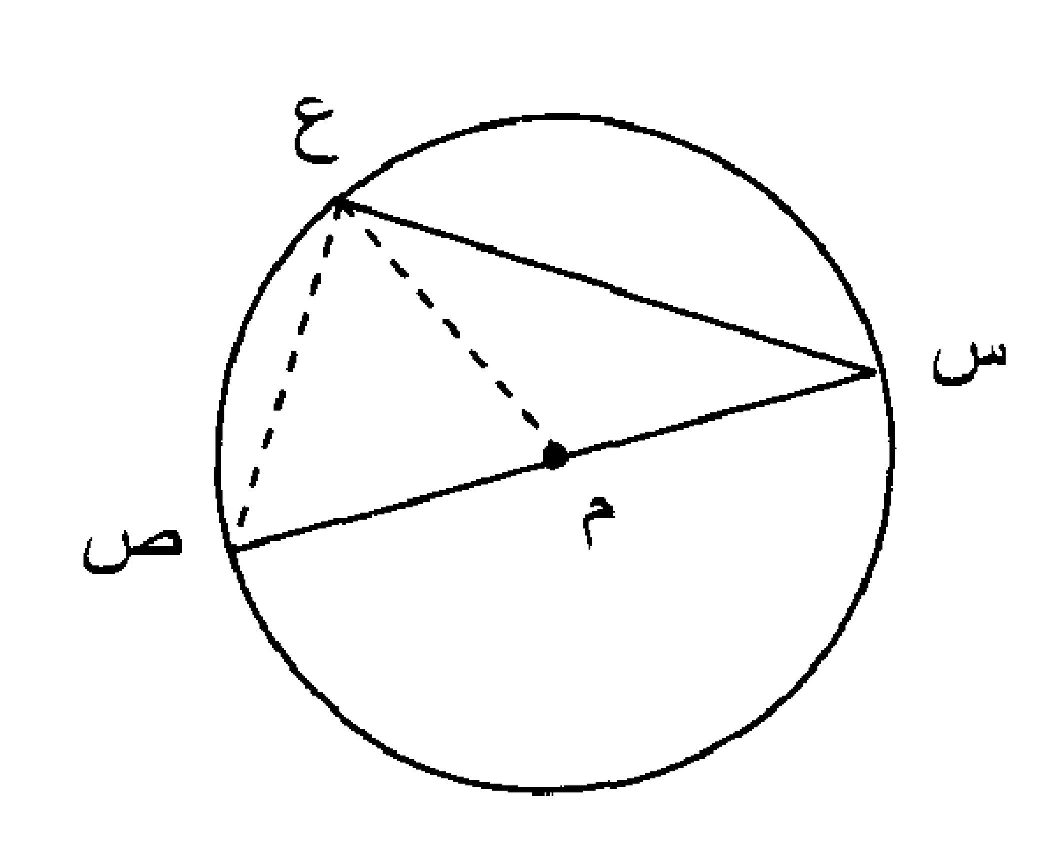

**البرهان:** ∡ أ م ب مركزية وقياسها 180° لأنها زاوية مستقيمة.

∡ أ جـ ب محيطية مشتركة مع ∡ أ م ب المركزية في القوس أ ب، أي أن:

∡ أ جـ ب = $\frac{1}{2}$ × ∡ أ م ب

= $\frac{1}{2}$ × 180°

= 90°




**مثال:** إذا كانت ∡ م س ع = 40°، جد قياس كلّ من:

∡ س م ع، ∡ م ع ص، ∡ ع م ص.

**الحل:** المثلث م س ع متساوي الساقين فيه: م س = م ع

∴ ∡ م ع س = ∡ م س ع = 40°

وهذا يعني أن:

∡ س م ع = 180° − (40° + 40°)

= 100°

∡ س ع ص = 90° (محيطية على القطر س ص)

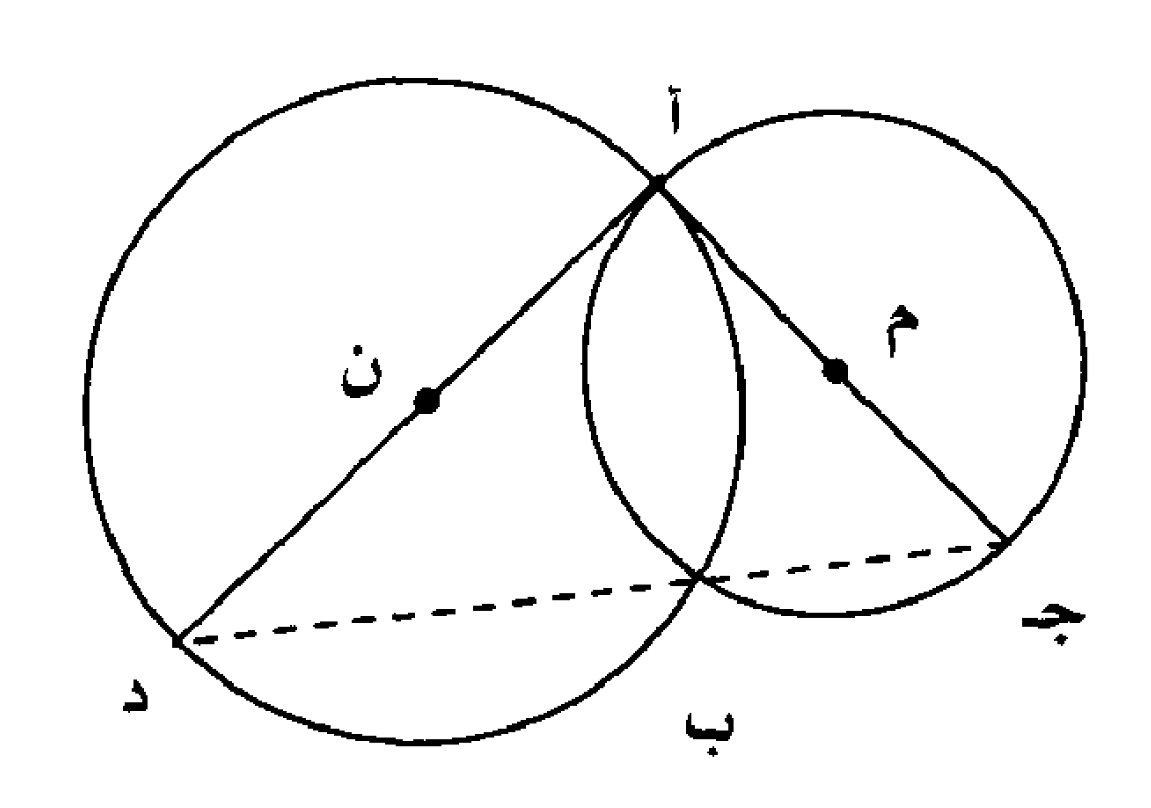
∴ ∡ م ع ص = 50° (لأن ∡ م ع س = 40°).

المثلث م ع ص متساوي الساقين فيه م ع = م ص

أي أن ∡ م ص ع = ∡ م ع ص = 50°

∴ ∢ع م ص = 180° − (50° + 50°)

= 80°

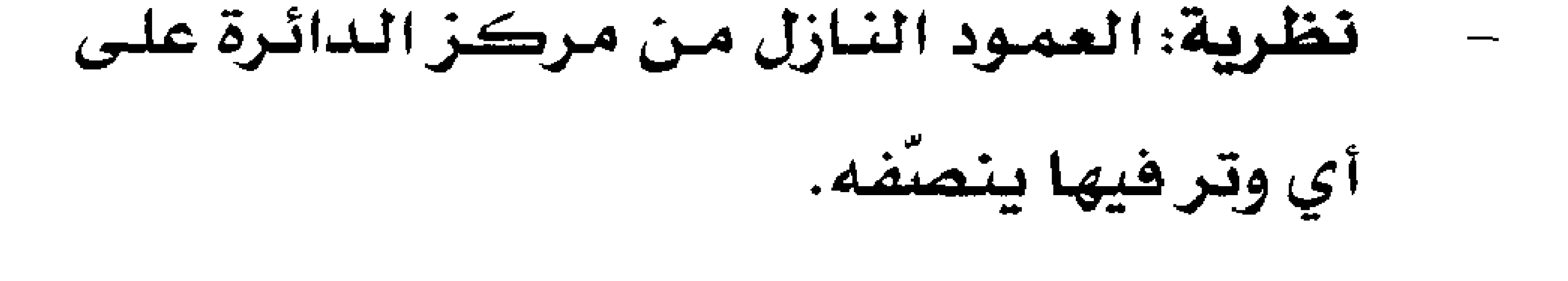



**تدريب:** دائرتان متقاطعتان في أ، ب. رسم أ جـ قطراً في الدائرة الأولى، ورسم أ د قطراً في الدائرة الثانية، أثبت أن النقط جـ، ب، د على استقامة واحدة.

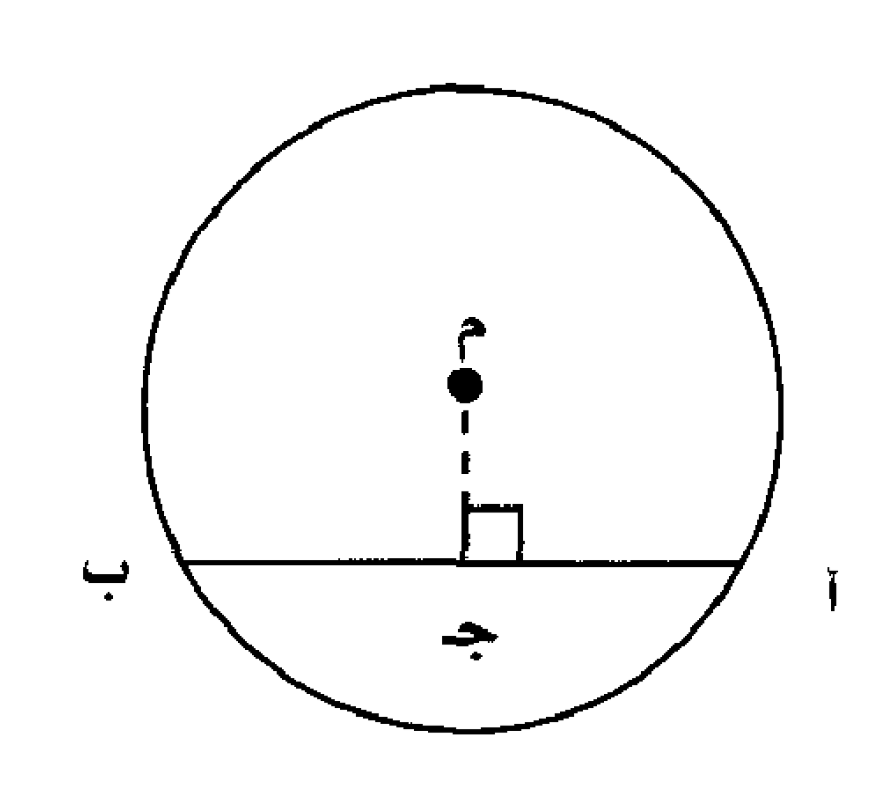
(إرشاد: صل النقطتين أ، ب ثم أكمل الحل).



### 7 – 3 العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر:



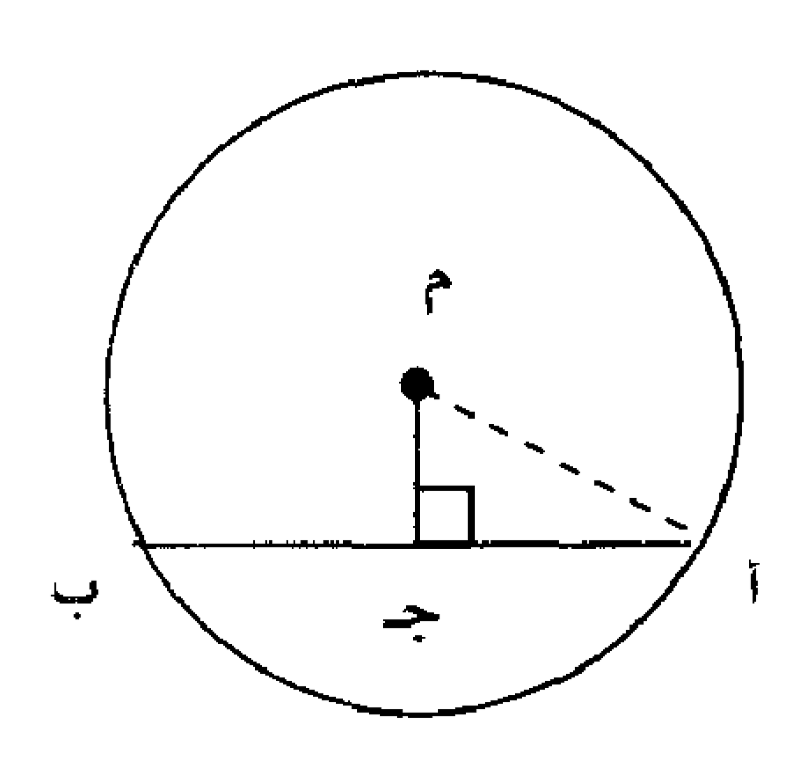
- **نظرية:** العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصّفه.



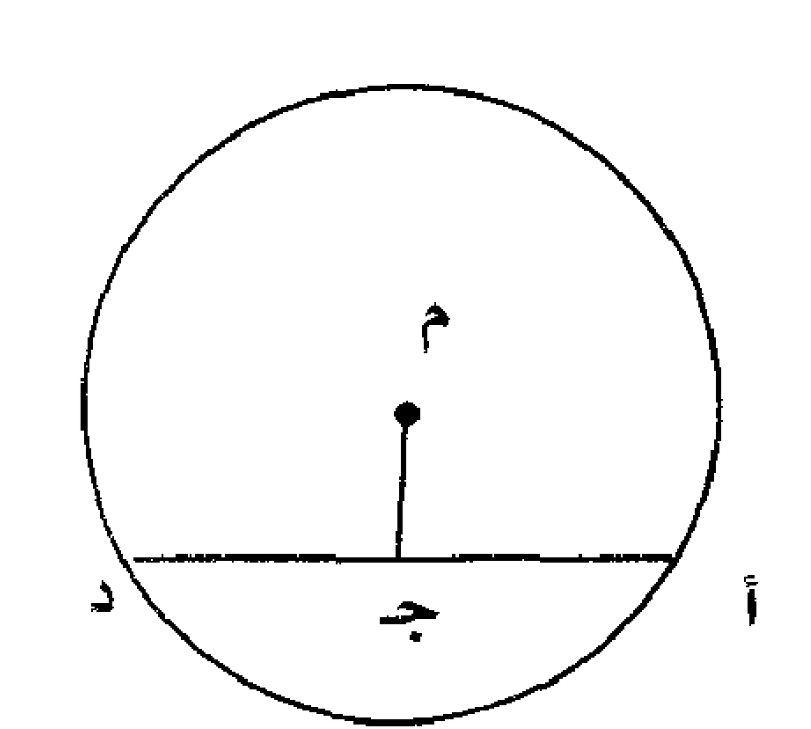

وبالرموز: إذا كان م جـ ⊥ أ ب فإن أ جـ = جـ ب

البرهان: صل م أ، م ب، وأثبت باستخدام تطابق المثلثين أ م جـ، ب م جـ أن أ جـ = جـ ب

(أكمل البرهان)




**مثال:** أ ب وتر في دائرة مركزها م، إذا كان طول العمود النازل من م على آ ب يساوي 12 سم، وأن نصف قطر الدائرة 13 سم، احسب طول الوتر أ ب.




**الحل:** أ م جـ مثلث قائم الزاوية في جـ، فيه:

$(\text{أ م})^2 = (\text{أ جـ})^2 + (\text{جـ م})^2$

$(13)^2 = (\text{أ جـ})^2 + (12)^2$

$\therefore (\text{أ جـ})^2 = 169 - 144 = 25$

أ جـ = 5 سم

بما أن م جـ عمود على الوتر أ ب فإن أ جـ = جـ ب = 5 سم

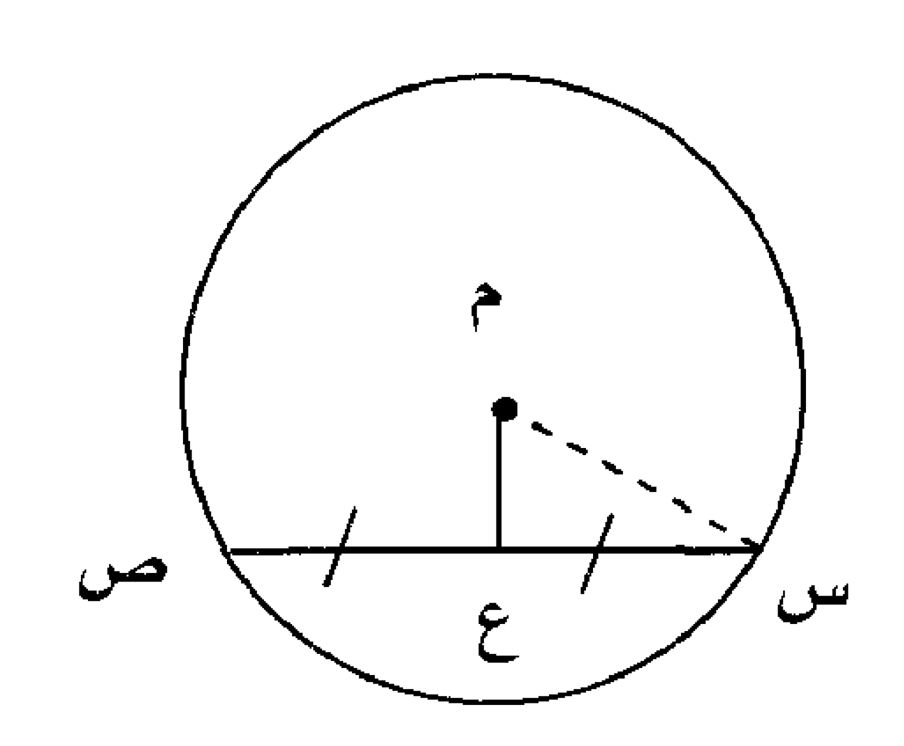
$\therefore$ أ ب = 5 سم + 5 سم = 10 سم

**تدريب:** أ ب وتر في دائرة طوله 24 سم، وبعده عن المركز 5 سم، جـ د وتر آخر في الدائرة بعده عن المركز 12 سم، احسب طول جـ د.

- **نظرية:** المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ومنتصف وتر فيها غير مارّ بالمركز يكون عموداً على الوتر.

وبالرموز: إذا كان أ جـ = جـ ب فإن م جـ عمود على أ ب

**تدريب:** أثبت النظرية السابقة.




**مثـال:** س ص وتـر في دائـرة مركزهـا م، ع منتصف س ص، إذا كان م ع = 3 سم وكان س ص = 8 سم، احسب طول نصف قطر الدائرة.

**الحـل:** بمـا أن ع منتصـف س ص فـإن م ع عمود على س ص، أي أن المثلث س م ع قائم الزاوية في ع.

∴ $(س م)^2 = (س ع)^2 + (ع م)^2$

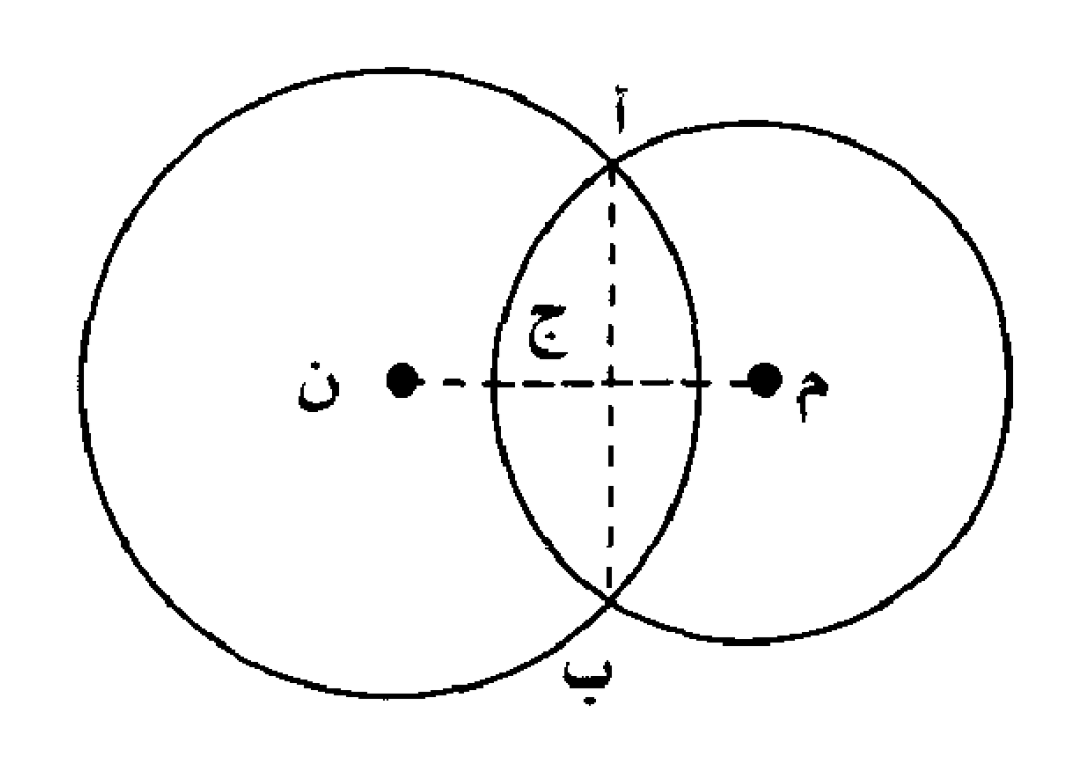
$= (4)^2 + (3)^2$

$= 25$

س م= 5 سم، أي أن نصف قطر الدائرة يساوي 5 سم.



### 7-4 خط المركزين والوتر المشترك للدائرتين:




إذا تقاطعت دائرتان في النقطتين أ، ب وكان مركزاهما م، ن فإن م ن يسمّى خط المركزين، ويسمى الوتر أ ب بالوتر المشترك في الدائرتين.

- **نظرية:** إذا تقاطعت دائرتان فإن خط المركزين ينصّف الوتر المشترك ويكون عموداً عليه.

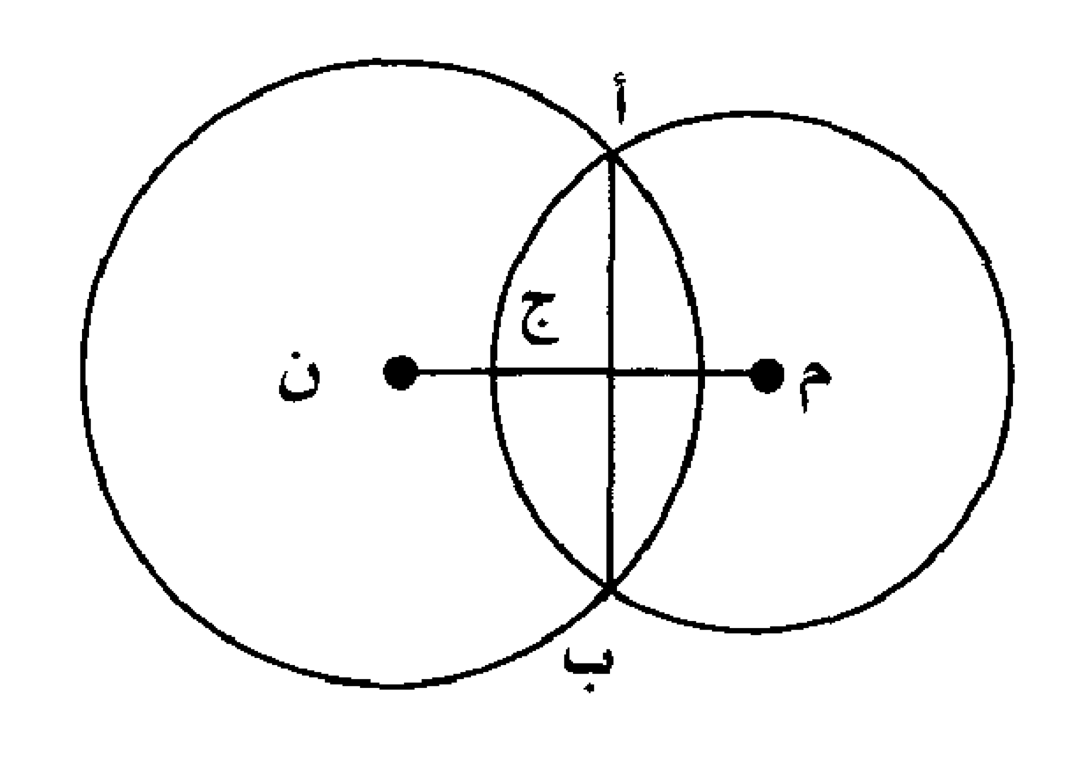
**البرهان:** نطابق المثلثين أ م ن، ب م ن بثلاثة أضلاع فينتج أن:

∢ أ م ن = ∢ ب م ن

ونطابق المثلثين أ م جـ، ب م جـ بضلعين وزاوية محصورة فينتج أن:

- ♦ أ جـ = جـ ب، أي أن خط المركزين ينصف الوتر المشترك.
- ♦ ∢أ جـ م = ∢ ب جـ م = 90°، اي أن خط المركزين يعامد الوتر المشترك.

**تدريب:** دائرتان متقاطعتان متساويتان، أثبت أن الوتر المشترك للدائرتين ينصف خط المركزين.




**مثال:** دائرتان متقاطعتان، نصف قطر إحداهما 7 سم، ونصف قطر الأخرى 6 سم، إذا كان طول الوتر المشترك للدائرتين 10 سم، احسب طول خط المركزين.

**الحل:**

**في المثلث القائم أ جـ م، أ م = 7 سم، أ جـ = 5 سم**

∴ $(م\,جـ)^2 = (7)^2 - (5)^2$

$= 49 - 25 = 24$

م جـ = $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ سم

**في المثلث القائم أ جـ ن، أ ن = 6 سم، أ جـ = 5 سم**

∴ $(جـ\,ن)^2 = (6)^2 - (5)^2$

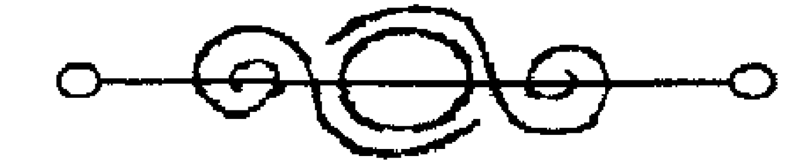
$= 36 - 25 = 11$

جـ ن = $\sqrt{11}$ سم

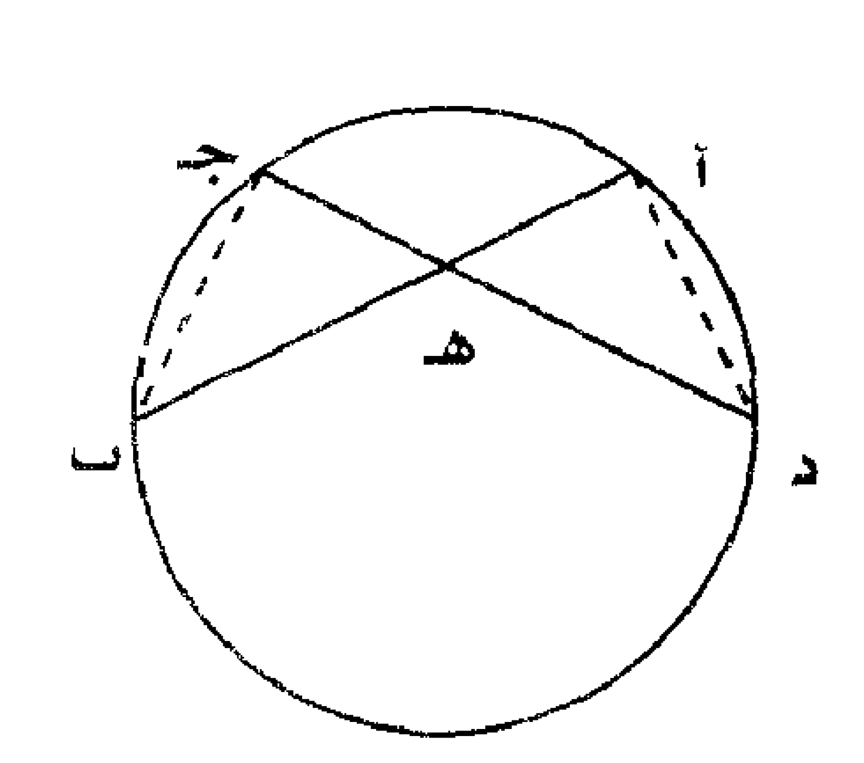
**∴ طول خط المركزين = م جـ + جـ ن**

= $(2\sqrt{6} + \sqrt{11})$ سم.

**تدريب: أثبت أنه إذا تساوى وتران في دائرة كان بعداهما عن مركزها متساويين.**



## 7-5 الأوتار المتقاطعة:



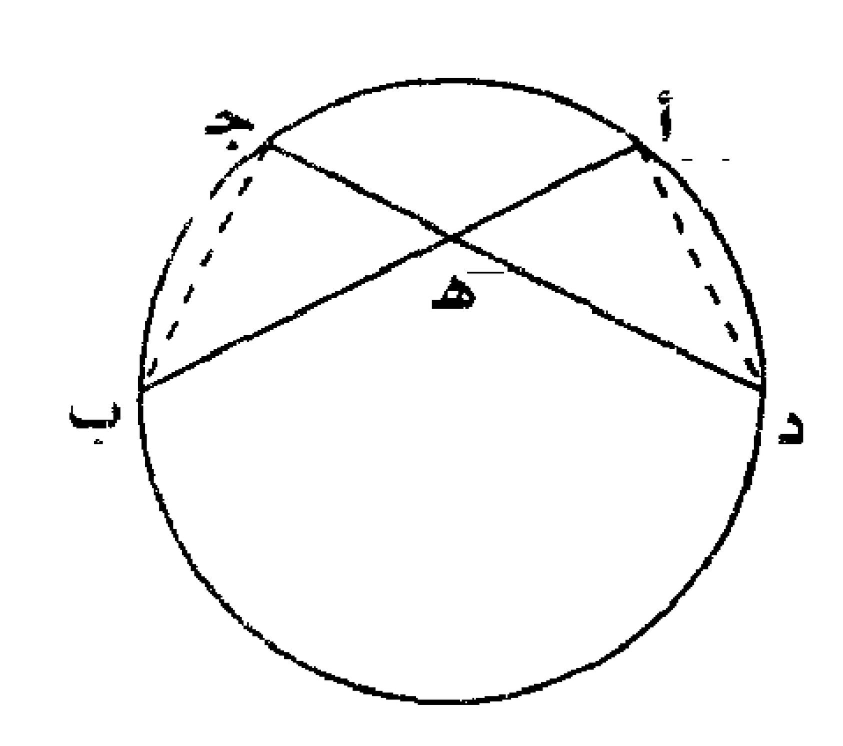

- نظرية: إذا تقاطع وتران داخل دائرة فإن مساحة المستطيل الذي بعداه جزءا الوتر الأول يساوي مساحة المستطيل الذي بعداه جزءا الوتر الثاني، أي أن حاصل ضرب جزأي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب جزأي الوتر الثاني. وبالرموز:
أ هـ × هـ ب = جـ هـ × هـ د

**البرهان:**

المثلثان أ هـ د ، جـ هـ ب متشابهان لأن الزوايا المتناظرة متساوية، وينتج أن:

$$\frac{\text{أ هـ}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{هـ ب}}$$

∴ أ هـ × هـ ب = جـ هـ × هـ د




**مثال:** أ ب، جـ د وتران متقاطعان داخل دائرة في هـ، إذا كان أ هـ = 4 سم، هـ ب = 6 سم، جـ هـ = 3 سم، أ د = 6 سم، احسب طول هـ د ، ب جـ.

**الحل:**

أ هـ × هـ ب = جـ هـ × هـ د

$4 \times 6 = 3 \times$ هـ د

∴ هـ د = $\frac{24}{3} = 8$ سم

وبما أن المثلثين أ هـ د ، جـ هـ ب متشابهان فإن:

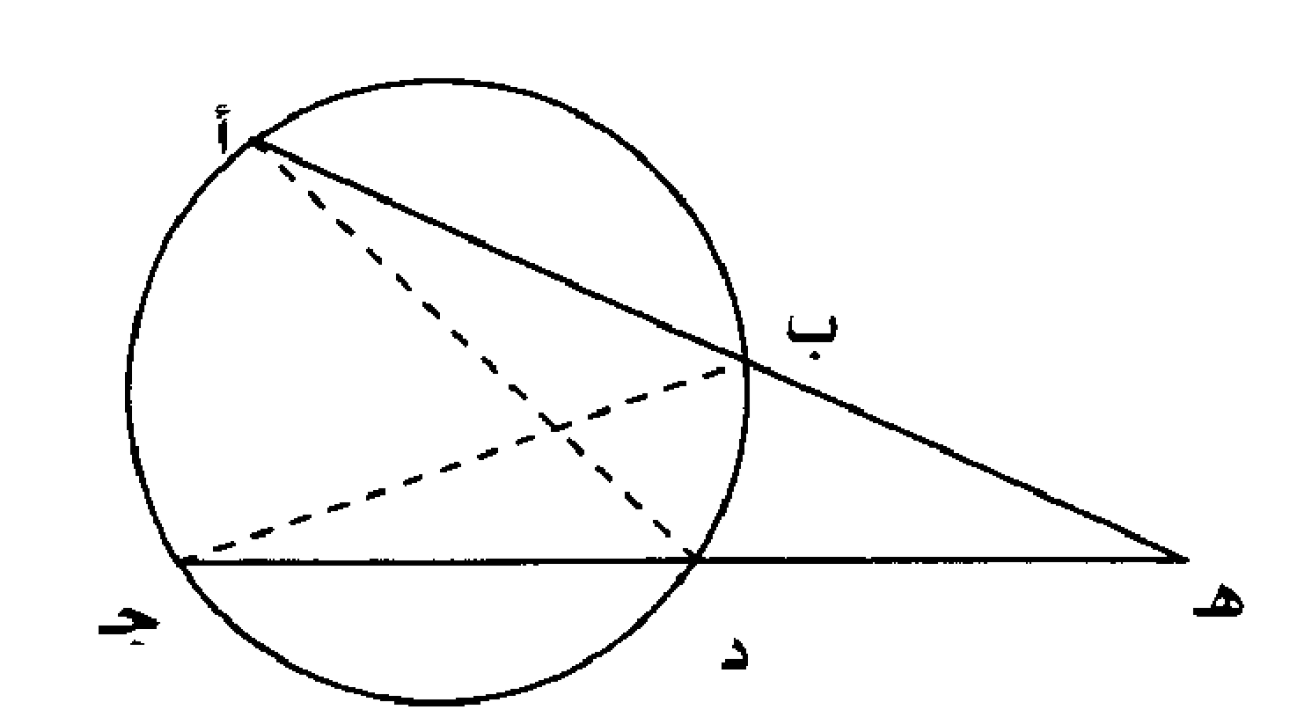
$$\frac{\text{أ د}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ هـ}}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{\text{جـ ب}}{3}$$

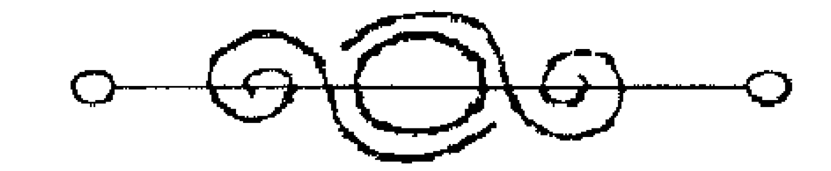
∴ 4 جـ ب = 6 × 3 = 18

جـ ب = 4.5 سم

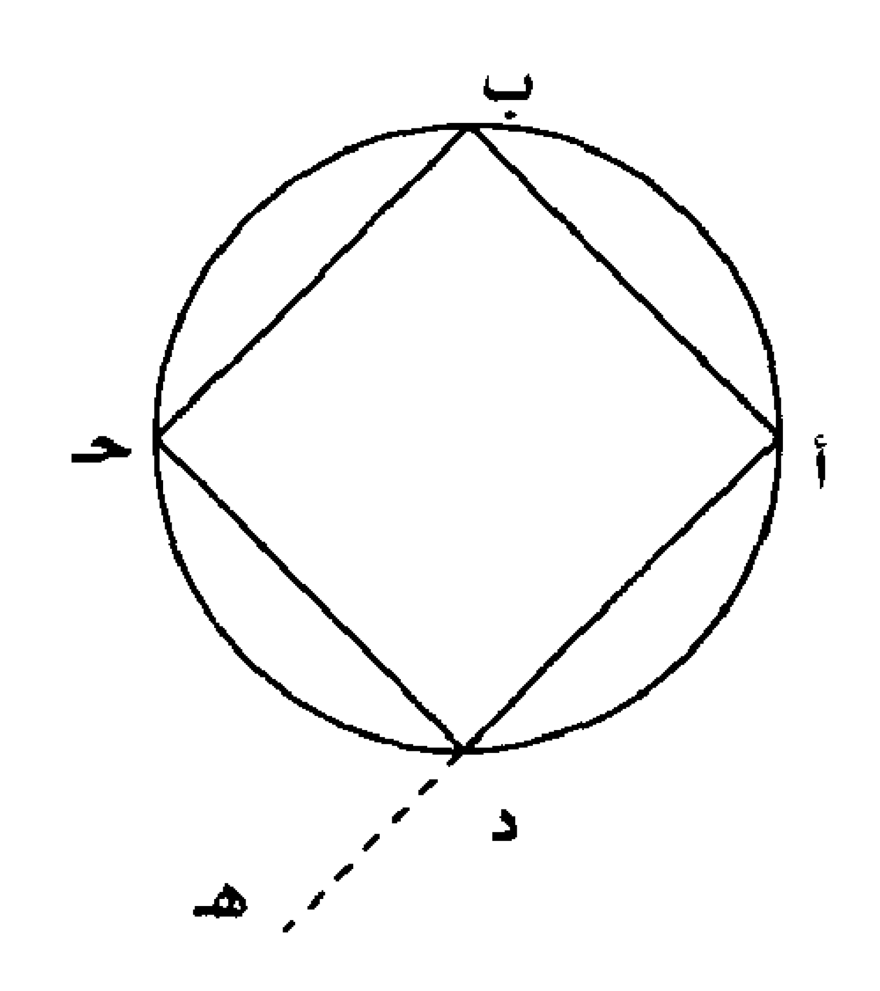
**تدريب:** برهن أنه إذا تقاطع امتداد الوترين أ ب، جـ د خارج الدائرة في النقطة هـ، فإن:




أ هـ × هـ ب = جـ هـ × هـ د



## 7-6 الشكل الرباعي الدائري:




الشكل الرباعي الدائري هو الشكل الرباعي المرسوم داخل دائرة، بحيث تقع رؤوسه على الدائرة.

◈ مجموع كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي °180.

أي أن: ∢ أ + ∢ جـ = °180

∢ب + ∢ د = °180

◈ الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري هي الزاوية المحصورة بين أحد أضلاع الشكل الرباعي وامتداد الضلع المجاور له، مثل ∢ جـ د هـ.

**تدريب:** أثبت أن ∢ جـ د هـ = ∢ ب

**مثال:** في الشكل المجاور إذا كانت:

∢ س = °80، ∢ ص = °70، جد قياس ∢ ل، ∢ ل ع و

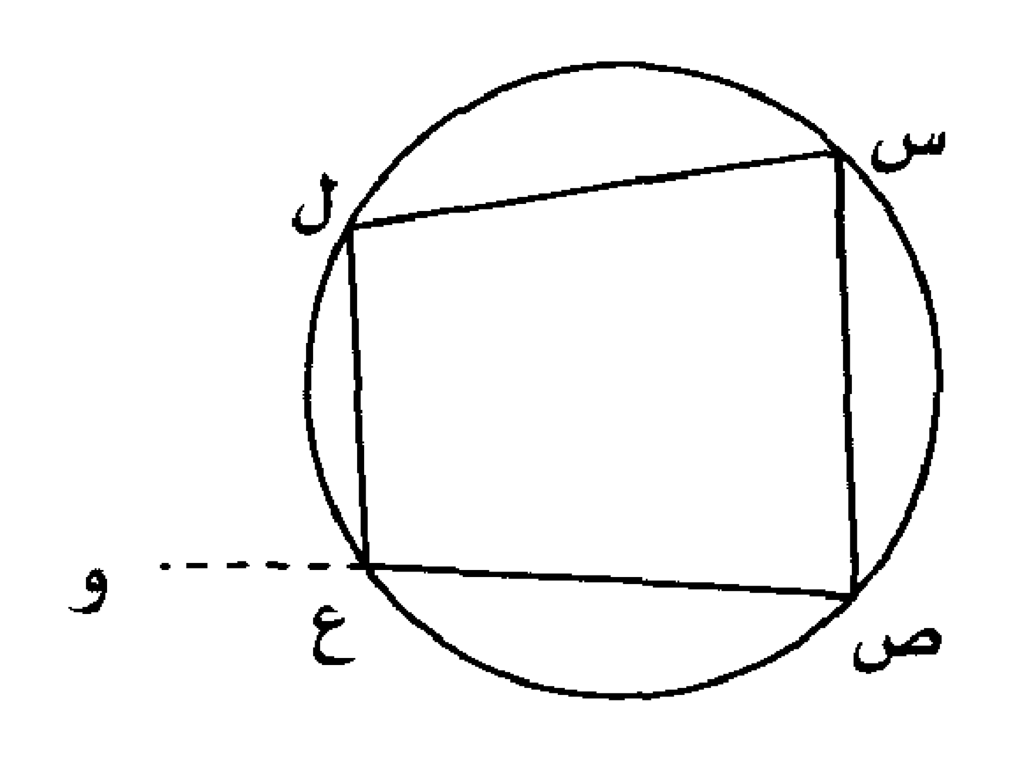
**الحل:** ∢ ص + ∢ ل = °180

∢°70 + ∢ ل = °180

∴ ∢ ل = °110

∢ل ع و = ∢س (لماذا؟)

= °80



**تدريب:** شكل رباعي دائري فيه قياس إحدى الزوايا يساوي ثلثي الزاوية المقابلة لها، ما قياس كل من الزاويتين؟

**مثال:** أي قياسات الزوايا الآتية يمكن أن تمثل زوايا شكل رباعي دائري:

1) $77°$، $80°$، $100°$، $103°$

2) $65°$، $84°$، $97°$، $114°$

**الحل:**

1) بما أن $77° + 103° = 180°$

و $80° + 100° = 180°$

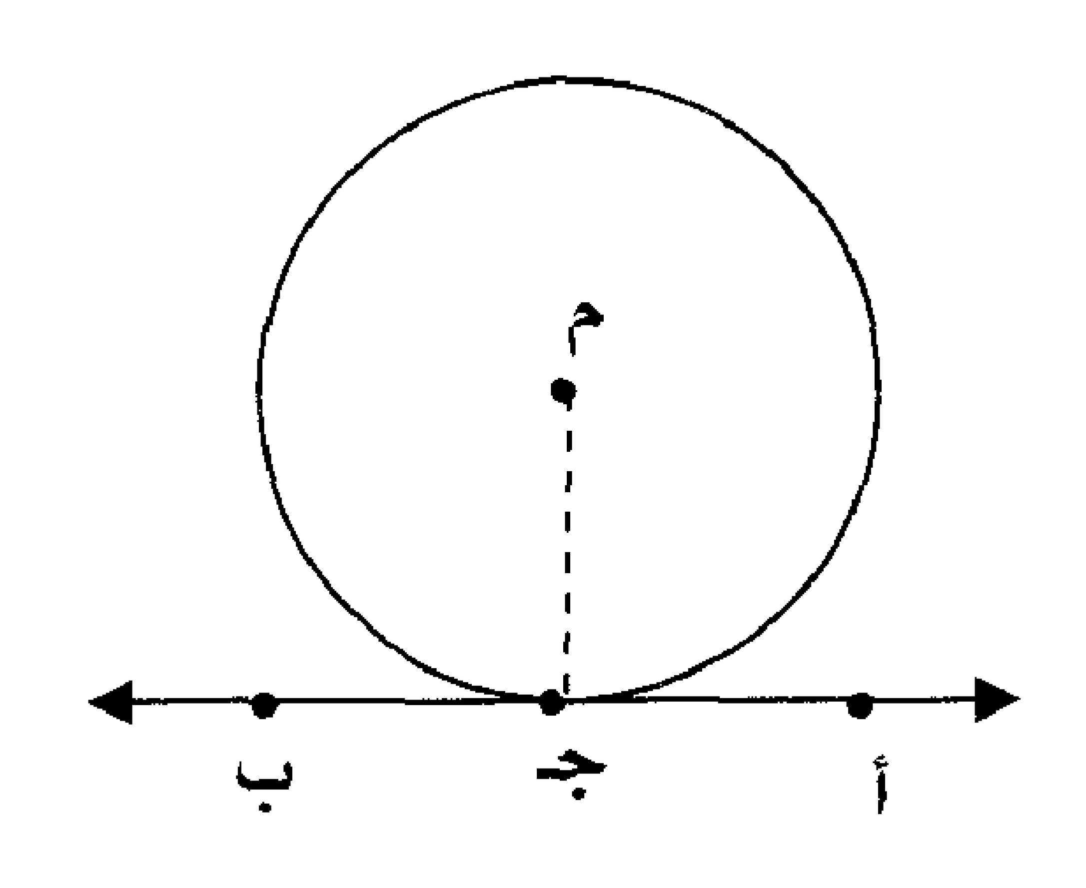
أي أنه يوجد زوجان من الزوايا المعطاة مجموعهما $180°$، وهذا يعني أنه يمكن أن تمثل هذه القياسات زوايا شكل رباعي دائري.

2) بما أنه لا يوجد زاويتان معطيتان مجموعهما $180°$، فلا يمكن أن تمثّل هذه القياسات زوايا شكل رباعي دائري.



### 7 – 7 مماس الدائرة والزاوية المماسية:

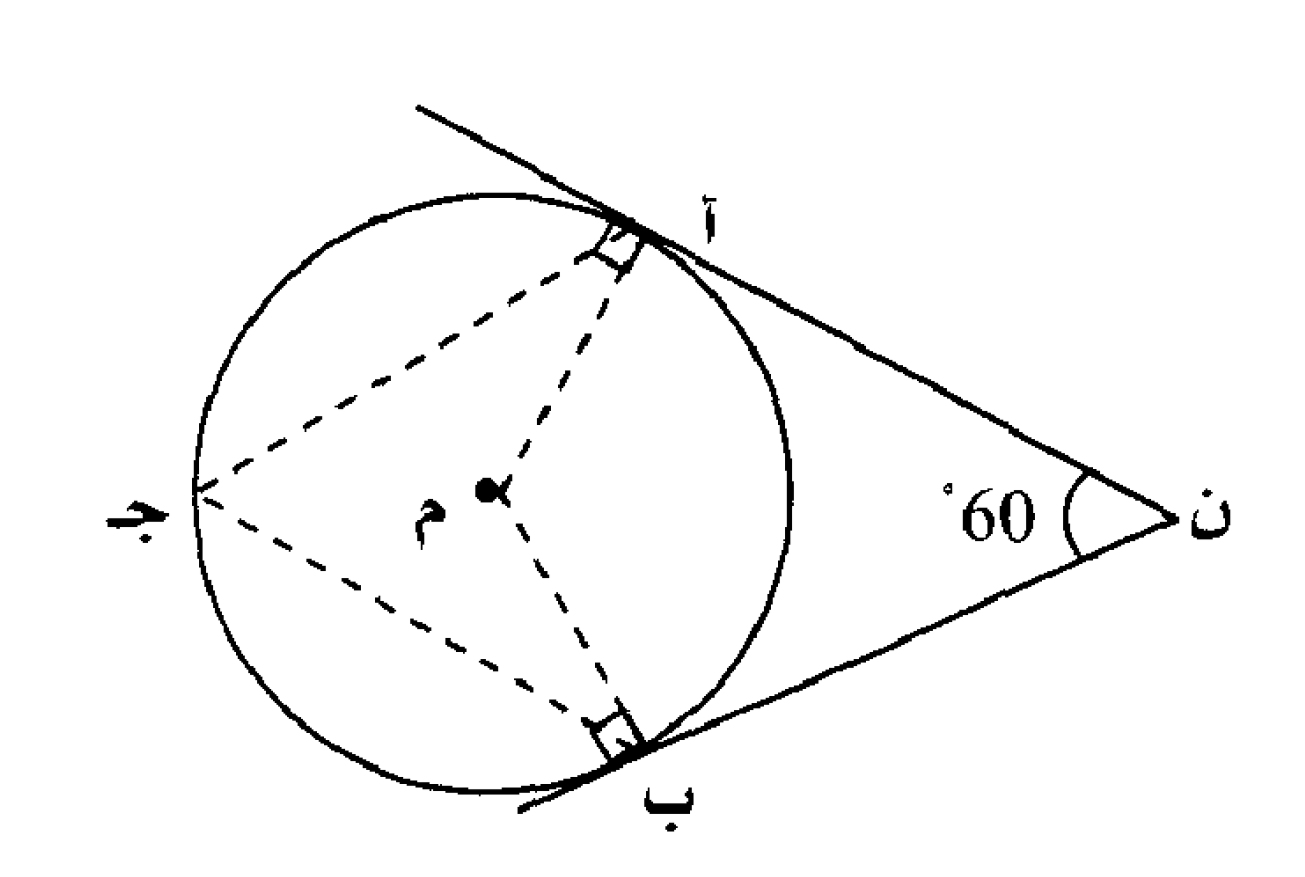
مماس الدائرة هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطة واحدة تسمى نقطة التماس.




في الشكل المجاور: المماس أ جـ يقطع الدائرة في نقطة التماس (جـ)، ويمكن القول أن الدائرة تمسّ المستقيم أ جـ في النقطة جـ.

♦ نصف قطر الدائرة يكون عموداً على مماس الدائرة من نقطة التماس، ففي الشكل السابق يكون نصف القطر (م جـ) عموداً على المماس (أ جـ).

**مثال:** دائرة مركزها م، ن أ، ن، ب مماسان للدائرة في أ، ب. ∢ أ ن ب = 60°، جـ نقطة على القوس الأكبر أ ب، أوجد قياس كل من: ∢ أ م ب، ∢ أ جـ ب




**الحل:** الشكل أ م ب ن رباعي مجموع قياسات زواياه يساوي 360°، وبما أن ∢ م أ ن = 90°

∢ م ب ن = 90°، فإن ∢ أ م ب = 120°

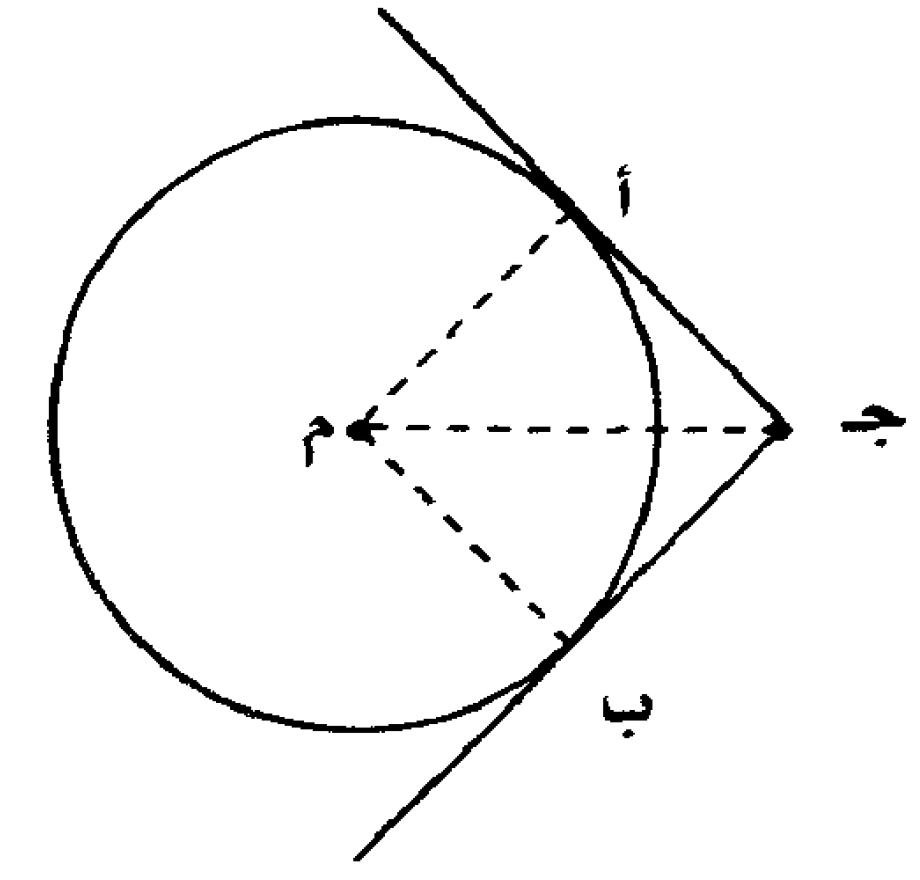
∢ أ جـ ب محيطية مشتركة مع الزاوية المركزية ∢ أ م ب في القوس الأصغر أ ب

$\therefore$ ∢ أ جـ ب = $\frac{1}{2}$ ∢ أ م ب

= $\frac{1}{2} \times 120°$

= $60°$

**تدريب:** أ ب قطر في دائرة، رُسم المماسان ج أ د، هـ ب و للدائرة في أ، ب. أثبت أن جـ د // هـ و.




- **نظرية:** المماسان المرسومان للدائرة من نقطة مفروضة خارجها متساويان.

وبالرموز: جـ أ = جـ ب

البرهان:

نطابق المثلثين أ م جـ، ب م جـ بوتر وضلع وقائمة، فينتج أن جـ أ = جـ ب

**تدريب:** أثبت أن جـ م ينصّف ∢ أ جـ ب وينصّف ∢ أ م ب.

**مثال:** جـ أ، جـ ب مماسان للدائرة م، إذا كان أ م = 6 سم، جـ م = 10 سم، احسب طول المماس جـ أ ب.

**الحل:** المثلث أ م جـ قائم الزاوية في أ فيه:

(م أ)$^2$ + (أ جـ)$^2$ = (م جـ)$^2$

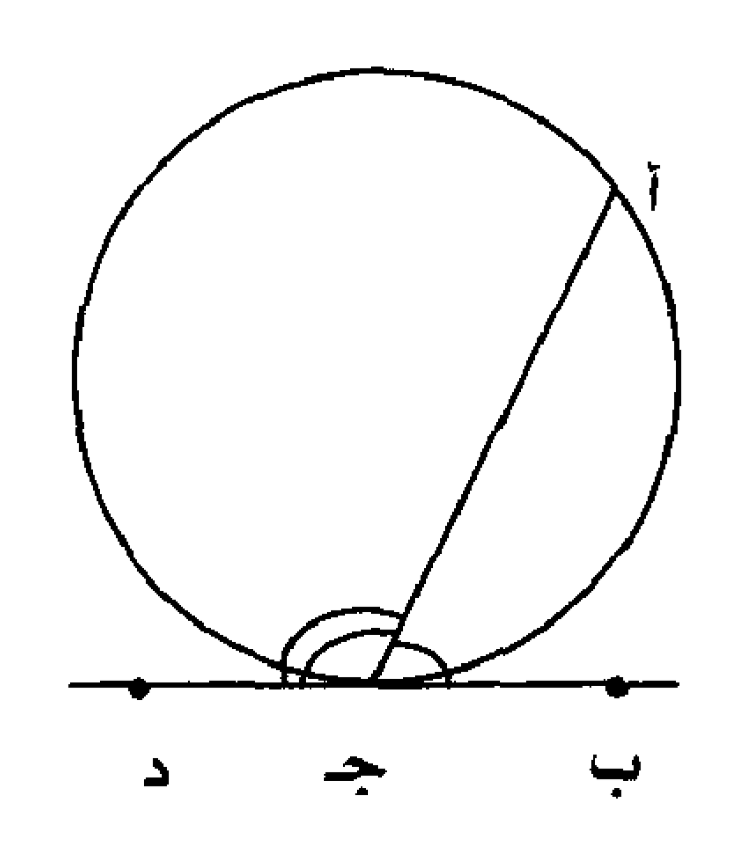
$(6)^2$ + (أ جـ)$^2$ = $(10)^2$

∴ (أ جـ)$^2$ = $100 - 36 = 64$

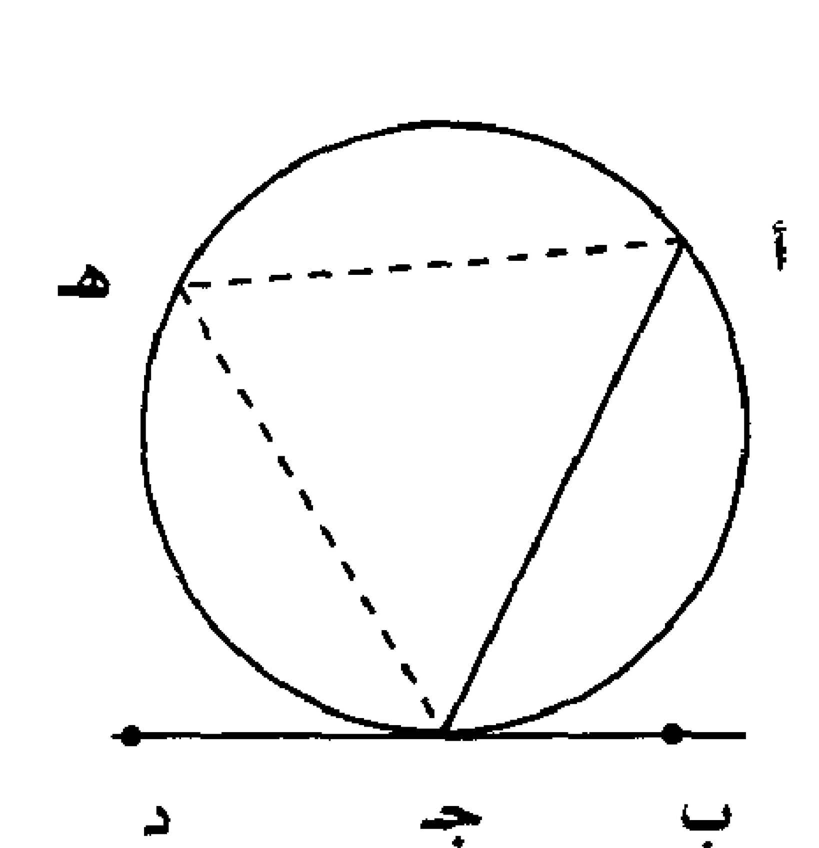
أ جـ = 8 سم

لكن ب جـ = أ جـ ∴ ب جـ = 8 سم.

**الزاوية المماسية:**




هي الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة وأيّ وتر فيها مار بنقطة التماس. في الشكل المجاور يوجد زاويتان مماسيتان، هما: ∢ ب جـ أ، ∢ د جـ أ.

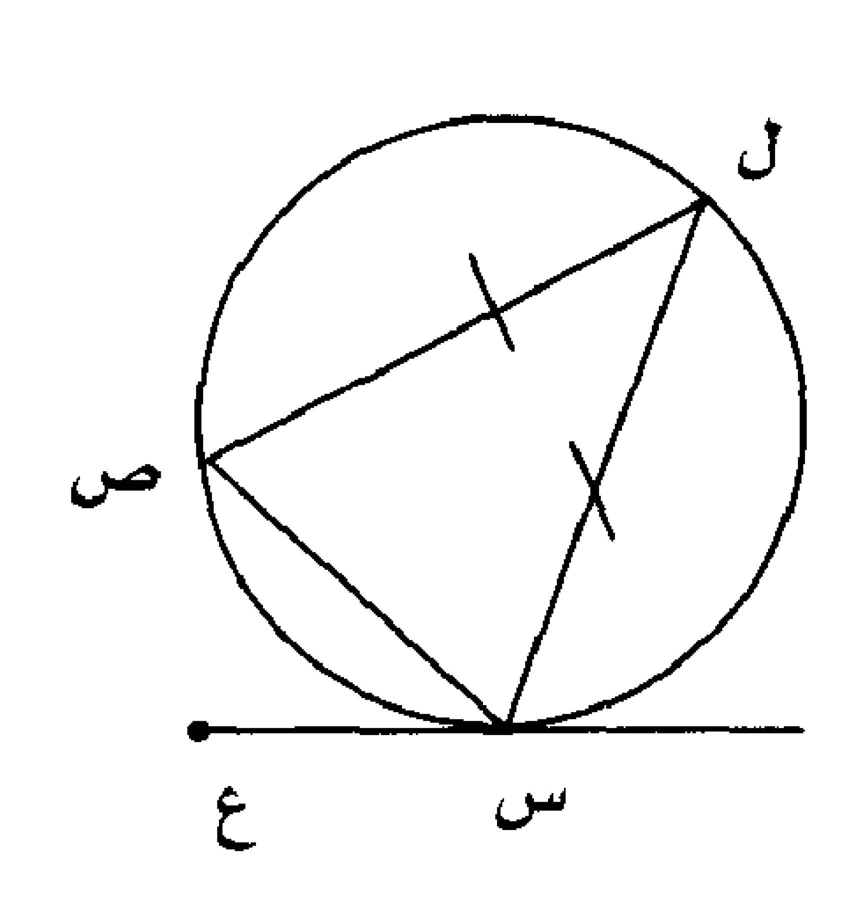



- نظرية: الزاوية المماسية المحصورة بين مماس الدائرة وأيّ وتر فيها مار بنقطة التماس في إحدى جهتي الوتر تساوي الزاوية المحيطية المرسومة على هذا الوتر في الجهة الأخرى.

وبالرموز: ∢ ب جـ أ = ∢ أ هـ جـ

**تدريب:** أثبت النظرية السابقة.

(إرشاد: ارسم نصف القطر جـ و، ثم صل و أ)




**مثال:** ع س مماس للدائرة في س

∢ع س ص = 70°

إذا كان ص ل = س ل، جد قيمة كل من:

∢ل س ص، ∢ ل ص س

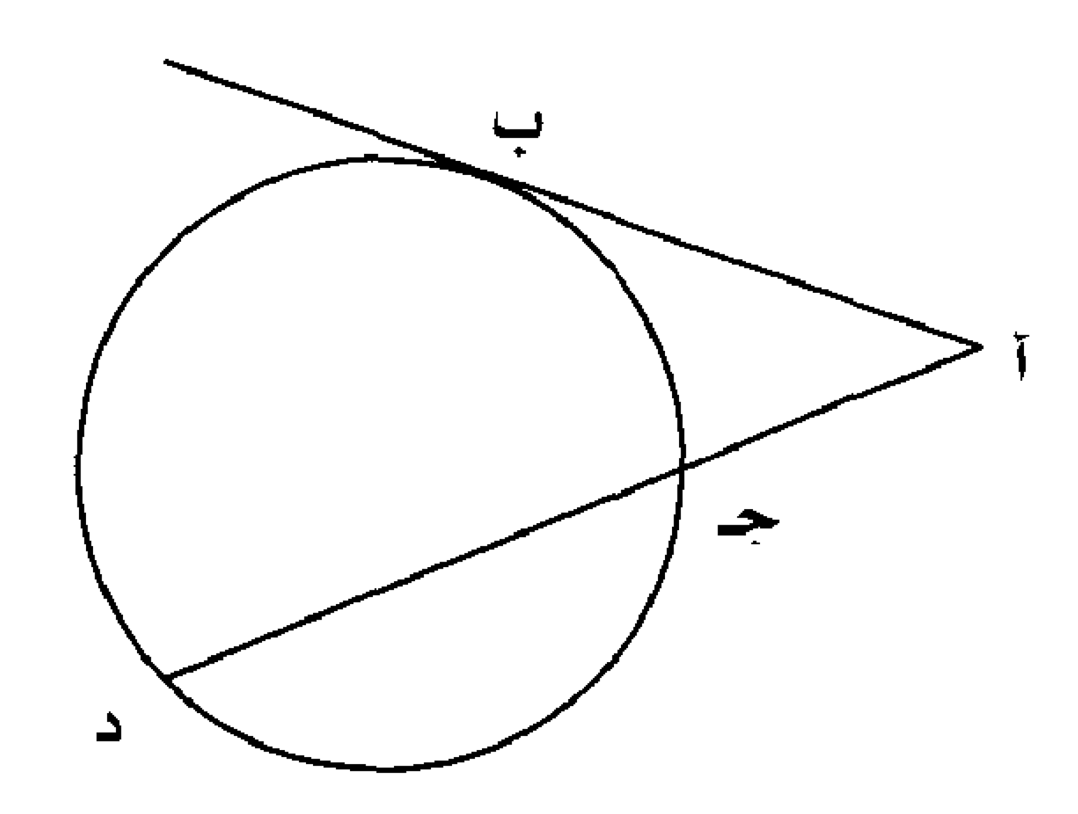
**الحل:**

∢س ل ص = ∢ع س ص = 70°(مماسية ومحيطية)

المثلث ل س ص متساوي الساقين فيه ∢ل س ص = ∢ل ص س

وبما أن مجموع زوايا المثلث يساوي °180، وقياس ∡ س ل ص= °70 فإن:

∡ ل س ص = ∡ ل ص س = °55




♦ إذا رُسم من نقطة خارج دائرة مماس للدائرة وقاطع لها، فإن مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب القاطع بتمامه في جزئه الواقع خارج الدائرة.

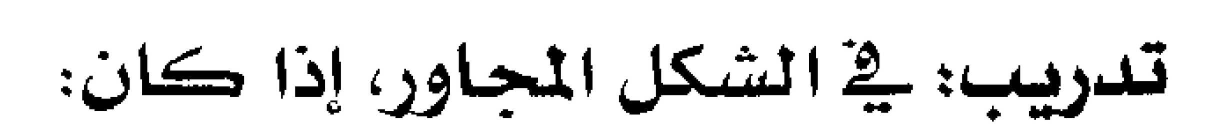
وبالرموز: $(أ\ ب)^2$ = أ د × أ جـ

**مثال:** إذا كان طول القاطع (أ د) = 9 سم وطول الجزء الواقع منه خارج الدائرة (أ جـ) = 4 سم، احسب طول المماس أ ب.

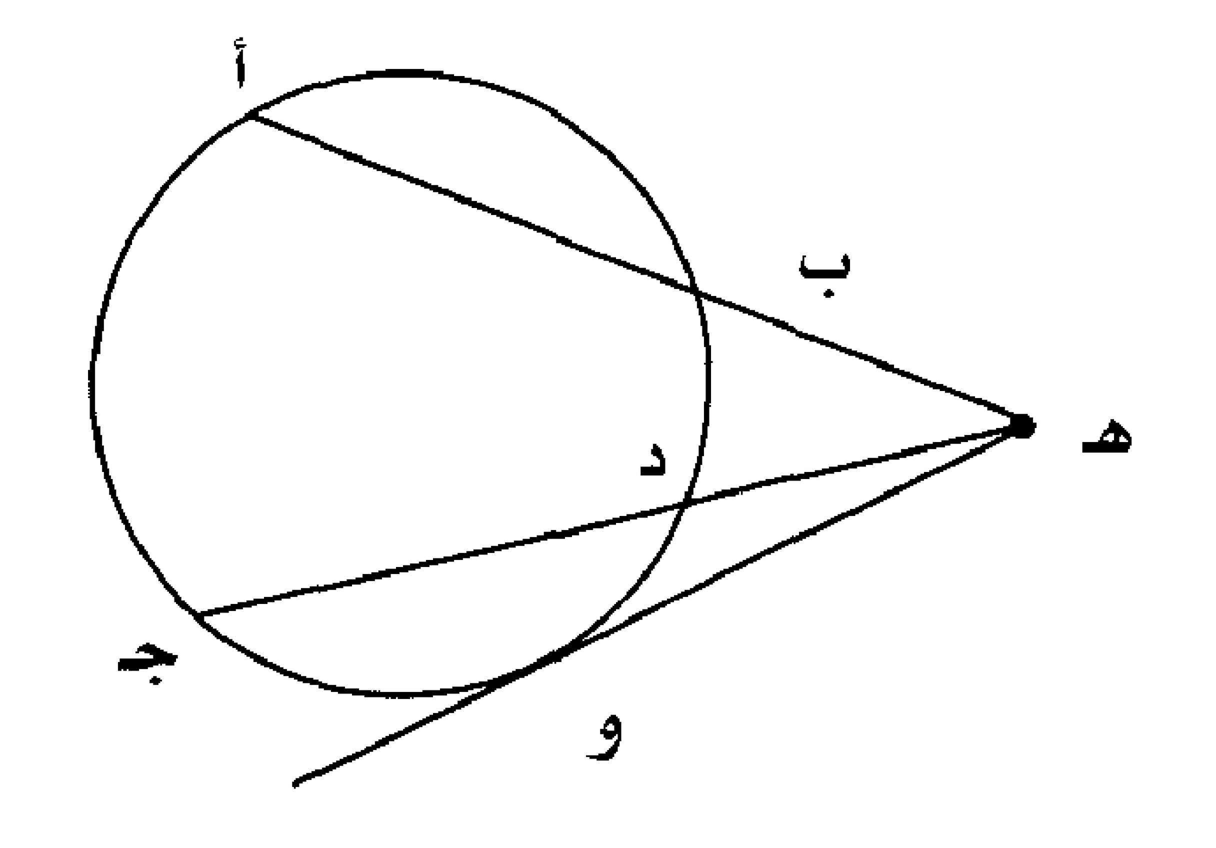
**الحل:** $(أب)^2$ = أ د × أ جـ

= 9 × 4 = 36

∴ أ ب = 6 سم.



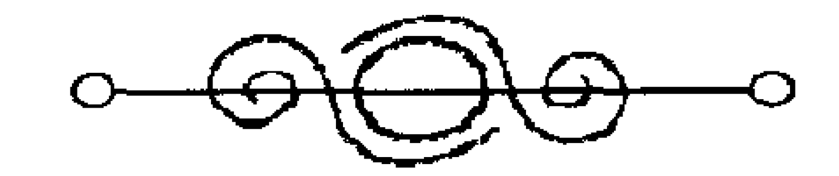
**تدريب:** في الشكل المجاور، إذا كان:




هـ د = 5 سم، د جـ = 11 سم

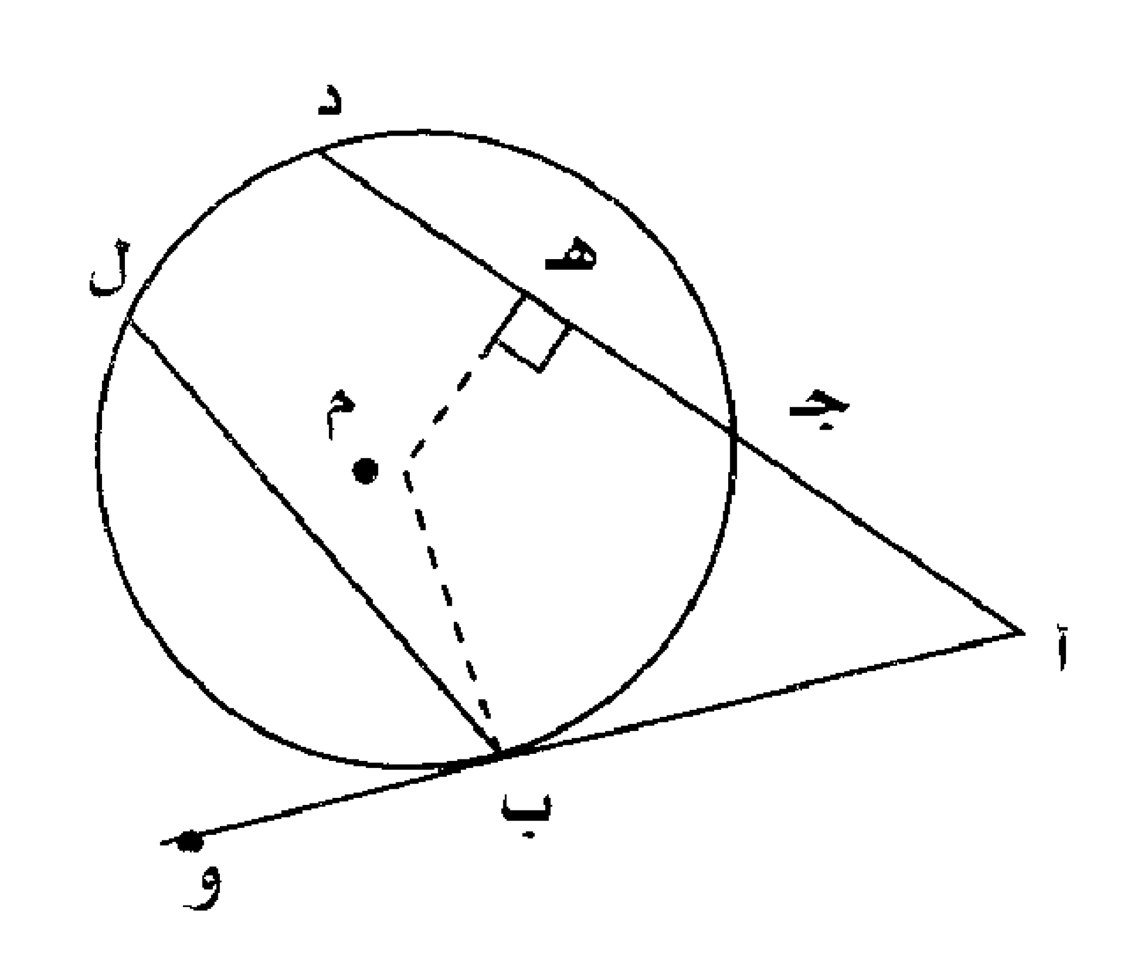
أ ب = 16 سم

جد طول هـ أ



## 7-8 أسئلة للمناقشة:

1. اعتمد الشكل المجاور في الإجابة عمّا يأتي:




1) أعط مثالاً لما يلي:

أ. نصف قطر للدائرة

ب. قاطع للدائرة

ج. وتر في الدائرة

د. مماس للدائرة

ه. زاوية مماسية

2) إذا كان م هـ = 2 سم، م ب = 3 سم، جد طول جـ د.

3) ما قياس ∢ أ ب م؟

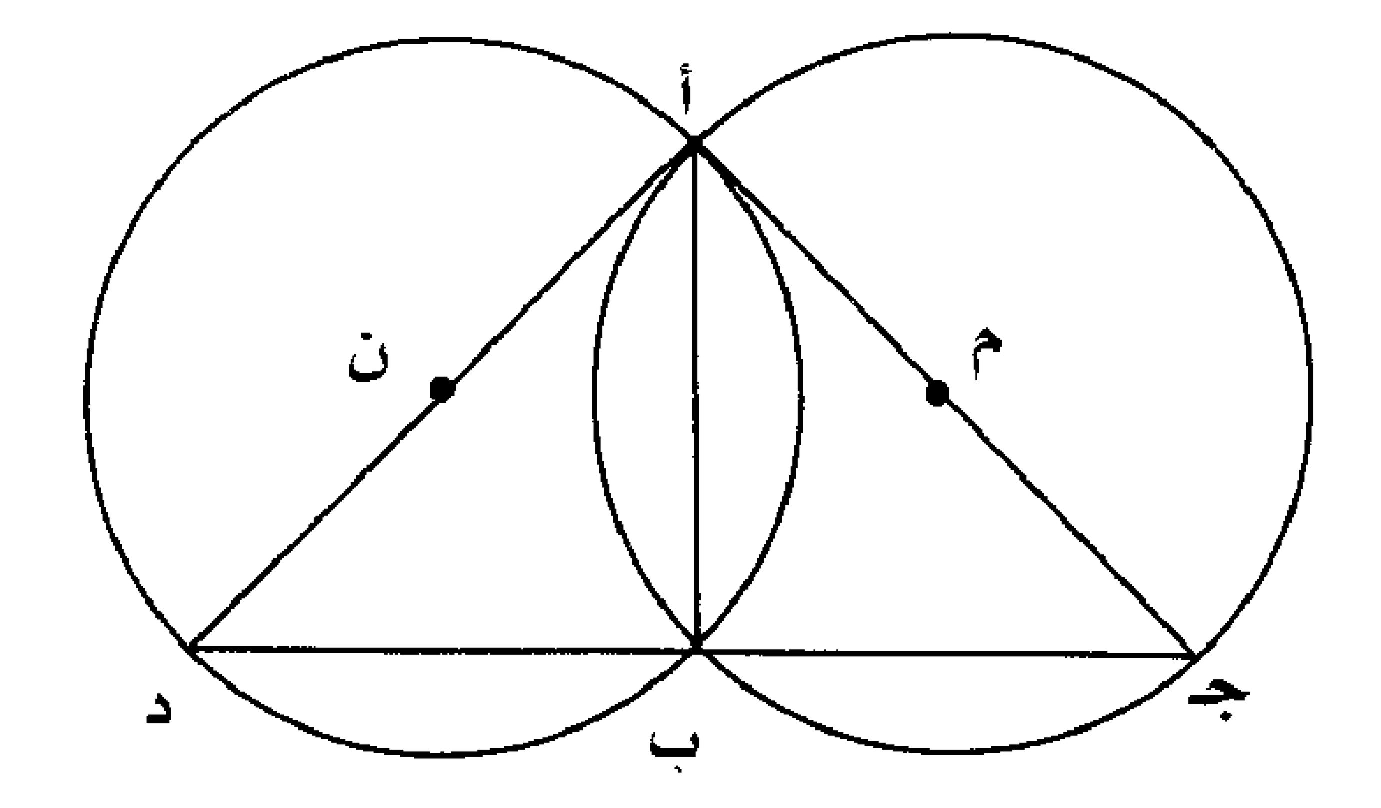
4) إذا كان قياس ∢ هـ م ب = 130°، فما قياس ∢ هـ أ ب؟

5) إذا كان أ جـ = 3 سم، جـ د = 5 سم، فما طول أ ب؟

2. س م ع زاوية مركزية قياسها 100° مشتركة مع الزاوية المحيطية س ص ع في القوس س ع، ما قياس ∢ س ص ع، ∢ س ع م؟

3. أ ب، جـ د وتران متقاطعان داخل دائرة في هـ، إذا كان ب هـ = ب د ، أثبت أن جـ هـ = جـ أ

4. في الشكل المجاور، إذا كان:




أ ب = ب جـ = ب د

أثبت أن ∢ جـ أ د = 90°

5. أ ب، جـ د وتران يتقاطعان خارج الدائرة في النقطة هـ، من جهة النقطتين ب، د ، إذا كان:

أ هـ = 12 سم، ب هـ = 5 سم، جـ د = 11 سم احسب طول هـ د.

6. رُسم مماس من نقطة هـ خارج الدائرة التي مركزها (م)، إذا كان طول المماس = 6 سم، هـ م = 10 سم، احسب نصف قطر الدائرة.

7. س ص ع ل شكل رباعي فيه ∢س ص ل=40°، ∢س ل ص=45°، ∢ص ع ل= 85°، أثبت أن الشكل س ص ع ل رباعي دائري.

8. دائرتان متحدتان في المركز وغير متساويتين، أثبت أن الأوتار المرسومة في الدائرة الكبرى وتمسّ الدائرة الصغرى تكون متساوية.

## الفصل الثامن

# الهندسة الإحداثية

8 – 1 المستوى الديكارتي

8 – 2 المسافة بين نقطتين

8 – 3 إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة

8 – 4 ميل الخط المستقيم وزاوية ميله

8 – 5 معادلة الخط المستقيم

8 – 6 التوازي والتعامد

8 – 7 البعد بين نقطة ومستقيم

8 – 8 معادلة الدائرة

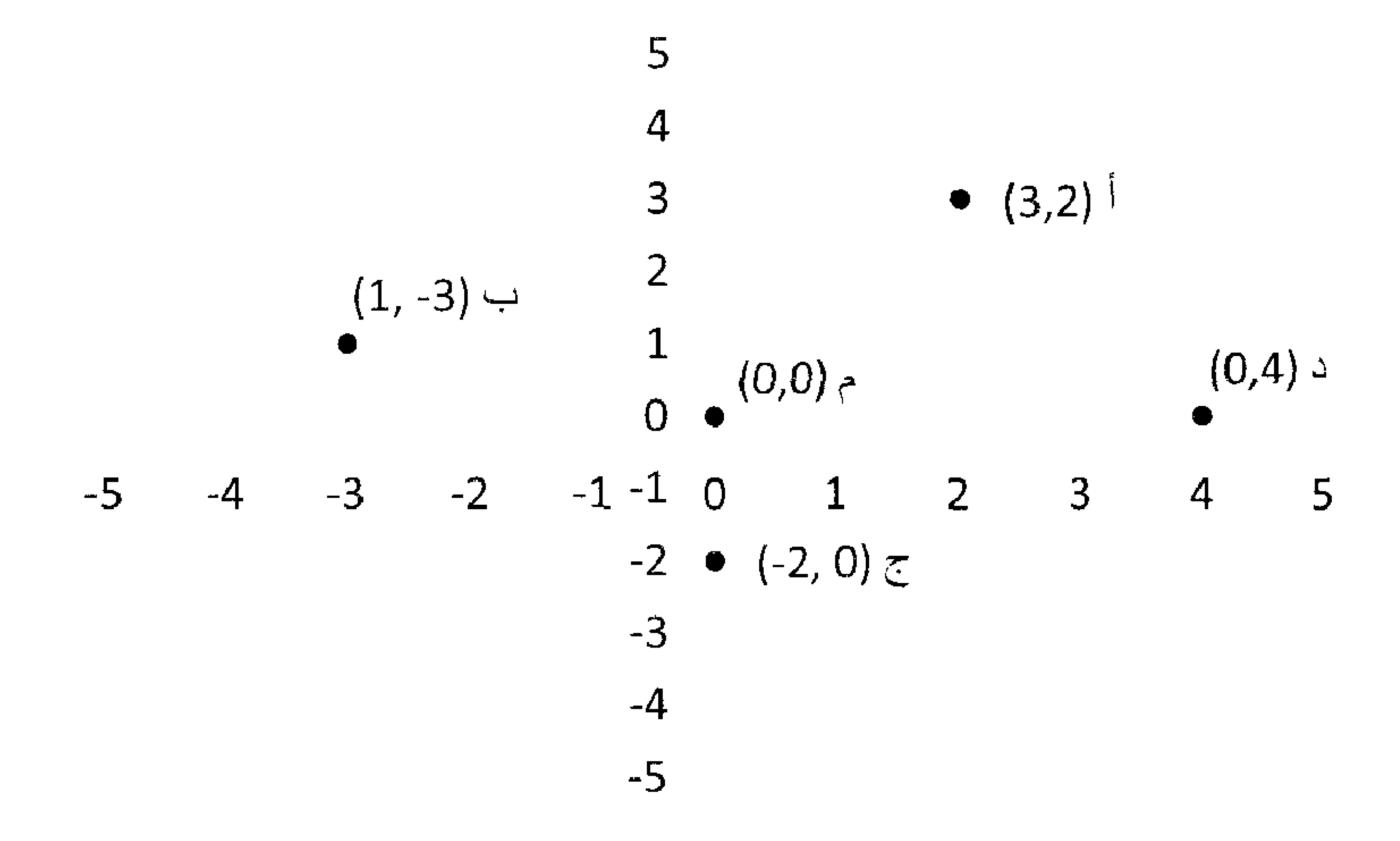
8 – 9 أسئلة للمناقشة

# الفصل الثامن

# الهندسة الإحداثية

## 8-1 المستوى الديكارتي:

يمثّل الشكل التالي نظاماً من الإحداثيات ناتجاً عن تقاطع محورين متعامدين، المحور الأفقي (محور السينات) والمحور العمودي (محور الصادات).




تسمّى نقطة تقاطع المحورين نقطة الأصل، ويسمّى المستوى الناتج المستوى الإحداثي أو المستوى الديكارتي، وكلّ نقطة في المستوى تقابل زوجاً مرتّباً من الأعداد الحقيقية مثل أ (س، ص)، حيث س هو المسقط الأول الذي يسمّى الإحداثي السيني، ص هو المسقط الثاني الذي يسمّى الإحداثي الصادي.

**أمثلة:**

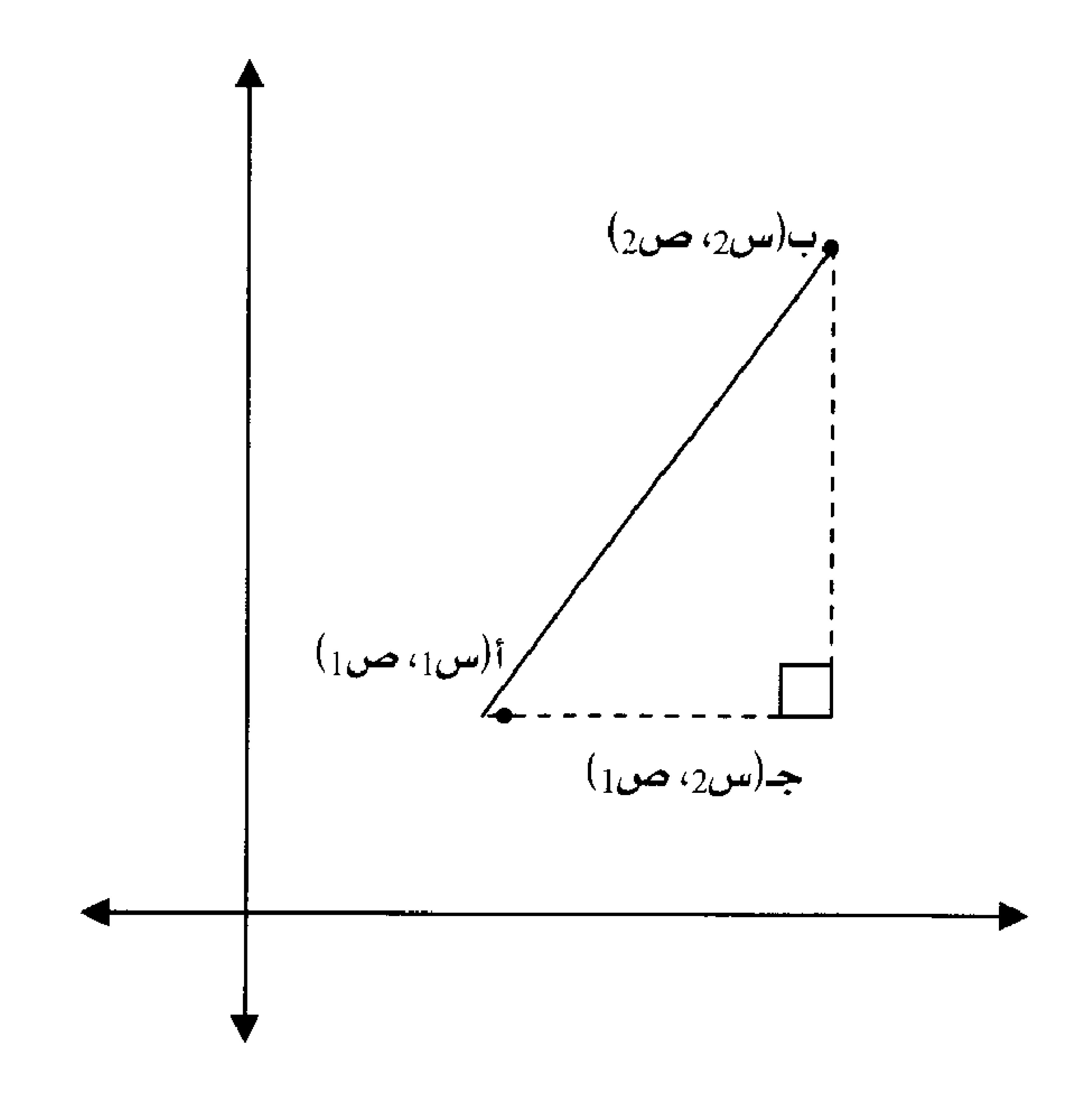
1) أ (2، 3) هي نقطة في المستوى، الإحداثي السيني لها يساوي 2 والصادي 3.
2) ب (−3، 1) هي نقطة في المستوى، الإحداثي السيني لها يساوي −3 والصادي 1.
3) جـ(0، −2) هي نقطة في المستوى، الإحداثي السيني لها يساوي 0 والصادي −2.
4) د(4، 0) هي نقطة في المستوى، الإحداثي السيني لها يساوي 4 والصادي 0.
5) م(0، 0) هي نقطة الأصل الناتجة عن تقاطع المحورين المتعامدين.

**تدريب:** ارسم محورين متعامدين، وعيّن في المستوى الديكارتي النقاط الآتية:

هـ(−1، 4)، و(−3، −2)، ز(3، 1)، ح(0،5)



## 8 – 2 المسافة بين نقطتين:




إذا كانت أ(س1، ص1)، ب(س2، ص2) نقطتين في المستوى الديكارتي فإن المسافة بين النقطتين أ، ب هي طول القطعة المستقيمة أ ب، حيث:

$$\text{أب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

**تدريب:**

استخدم نظرية فيثاغورس للمثلث أ ب جـ الوارد في الشكل المجاور لاستنتاج علاقة المسافة بين النقطتين أ، ب

**مثال:** احسب المسافة بين النقطتين هـ(4، 1)، و(0، –2)

**الحل:** هـ و = $\sqrt{(4-0)^2 + (1--2)^2}$

= $\sqrt{16 + 9}$ = $\sqrt{25}$ = 5 وحدات طول

**مثال:** إذا كانت أ(1، 5)، ب(4، 1)، جـ(–3، 1) ، ما نوع المثلث أ ب جـ من حيث طول أضلاعه؟

**الحل:** أ ب = $\sqrt{(1-4)^2 + (5-1)^2}$ = $\sqrt{9 + 16}$ = $\sqrt{25}$ = 5 وحدات طول.

أ جـ = $\sqrt{(-3-1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ وحدة طول.

ب جـ = $\sqrt{(-3-4)^2+(1-1)^2}=\sqrt{49+0}=\sqrt{49}=7$ وحدات طول.

بما أنّ أ ب ≠ أ جـ ≠ ب جـ فالمثلث مختلف الأضلاع

**تدريب:** إذا كانت أ(0، 1)، ب(−2، 3)، جـ(3، 4) ، أثبت أن المثلّث قائم الزاوية في أ.

**تدريب:** بيّن أن النقاط س(1،1)، ص(−2، −5)، ع(0، 3) ليست على استقامة واحدة.



## ***3−8 إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة:***

إذا كانت أ($س_1$، $ص_1$)، ب($س_2$، $ص_2$) فإن إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب هما:

$$\left(\frac{س_1+س_2}{2}،\frac{ص_1+ص_2}{2}\right)$$

**مثال:** إذا كانت أ(4، 1)، ب(– 2، 5)، جد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب.

**الحل:** إحداثيا منتصف أ ب هما: $\left(\frac{4+ -2}{2}، \frac{1+5}{2}\right)$ أي (1، 3)

**مثال:** إذا كانت جـ(0، 2) منتصف القطعة المستقيمة أ ب، وكان أ(– 3، 1) فما إحداثيا النقطة ب؟

**الحل:** نفرض أن إحداثيي النقطة ب هما (س، ص)، فيكون

$$\left(\frac{-3 + س}{2} ، \frac{1 + ص}{2}\right) = \left(0 ، 2\right)$$

أي أن: $\frac{-3+س}{2} = 0$ ، ومنه س = 3

$\frac{1+ص}{2} = 2$ ، ومنه ص = 3

∴ إحداثيا النقطة ب هما (3، 3)

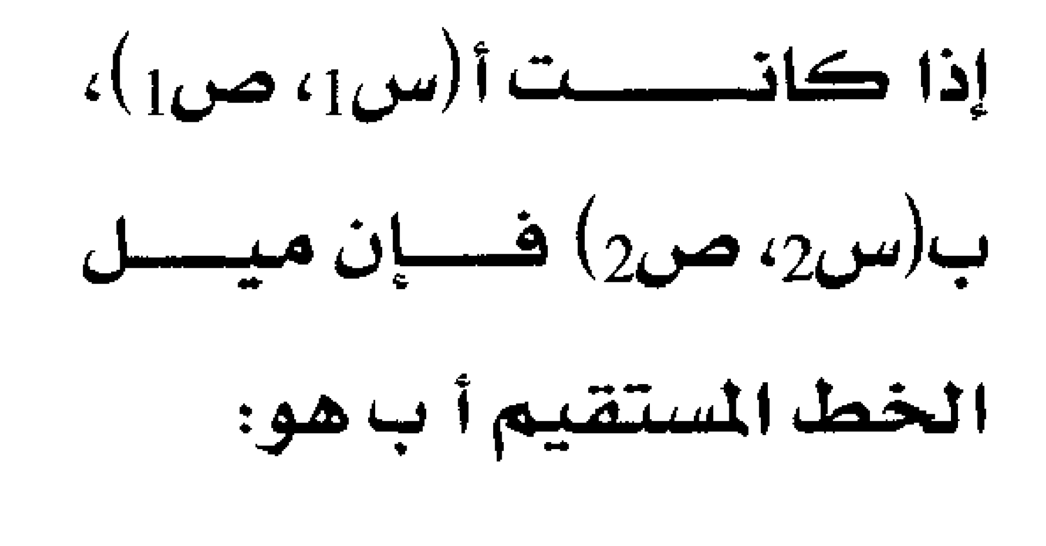
**تدريب:** جد إحداثيي منتصف القطعة المستقيمة هـ و إذا كانت:

1) هـ(1، – 7) ، و(– 5، 3)
2) هـ(0، 0) ، و(4، – 4)
3) هـ(– 2، – 3) ، و(2، 3)

تدريب: إذا كانت أ(−1، 5)، ب(5، −3)، جـ(−7، − 3) رؤوس مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ، احسب مساحة المثلث أ ب جـ.

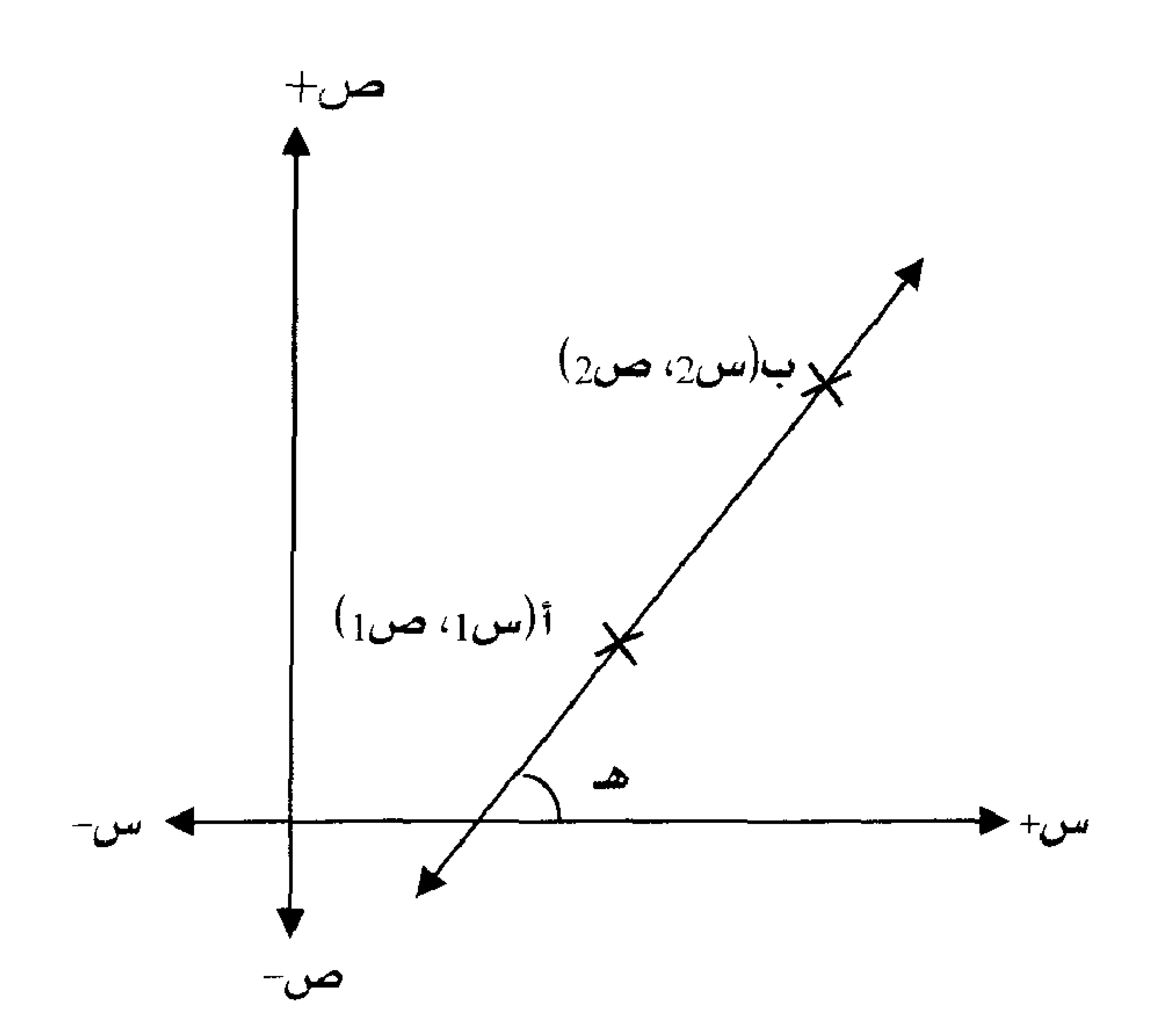


## 8 − 4 ميل الخط المستقيم وزاوية ميله:



إذا كانت أ($س_1$، $ص_1$)، ب($س_2$، $ص_2$) فإن ميل الخط المستقيم أ ب هو:

$$م_{أب} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$




والزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تسمّى زاوية ميل المستقيم (الزاوية هـ)، وميل المستقيم (م) يساوي ظل زاوية ميله (هـ)،

أي أنّ: م = ظا هـ

مثال: جد ميل المستقيم المار بالنقطتين ع(−1، 4)، ل(3، 6)

الحل:

$$م_{عل} = \frac{4-6}{1--3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

**مثال:** جد ميل المستقيم الذي زاوية ميله $30^\circ$.

**الحل:** م = ظا $30^\circ$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

**مثال:** جد زاوية ميل المستقيم المار بالنقطتين أ(1، −2)، ب(0، −3)

**الحل:** م$_{أب}$ = $\frac{-3 - -2}{0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$

ظا هـ = 1 $\Leftarrow$ هـ = $45^\circ$

**تدريب:** إذا كان ميل المستقيم جـ د = −5، وكان جـ(4، −1)، د(س، 9)، جد قيمة س.

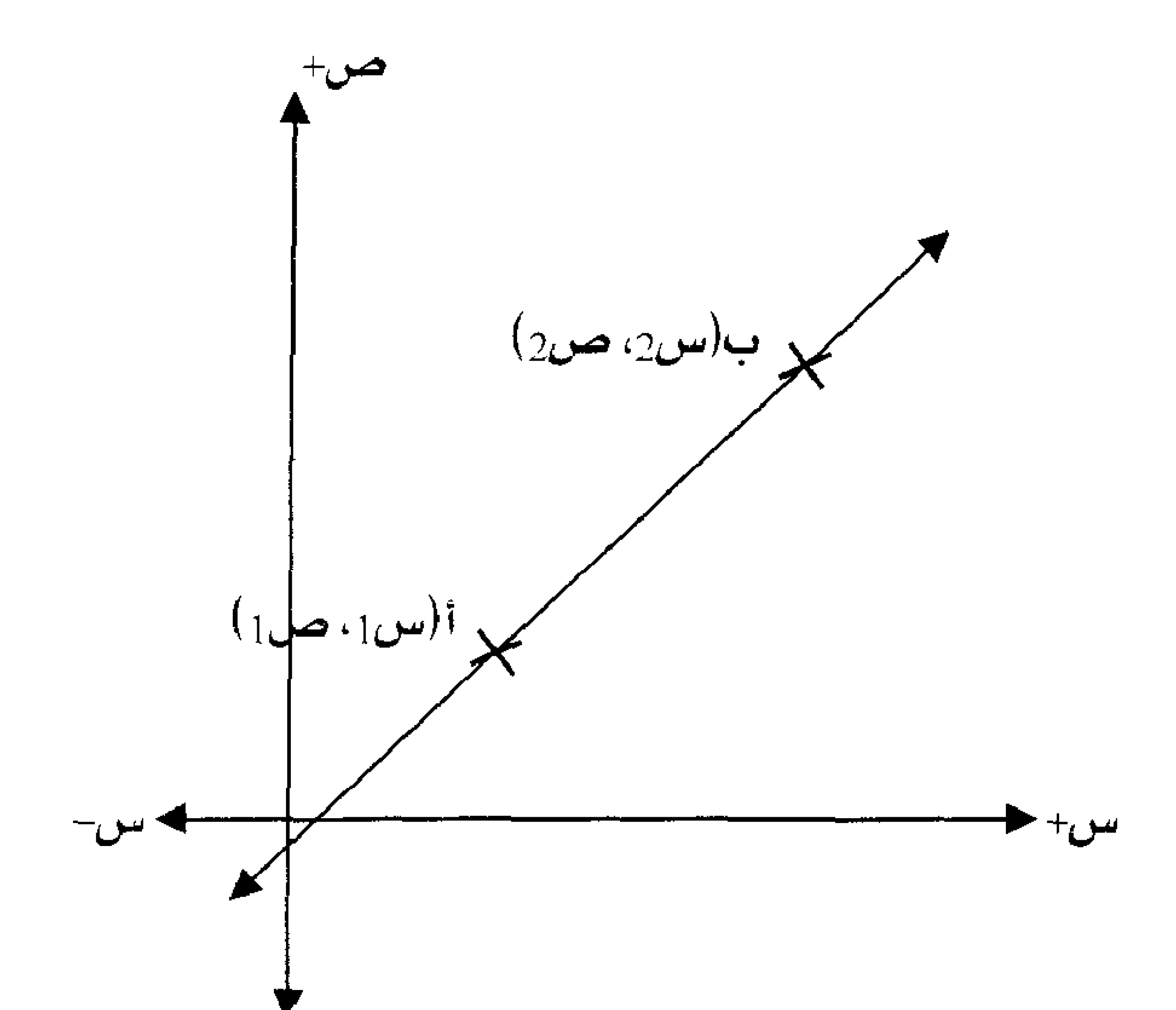
**تدريب:** جد زاوية ميل المستقيم المار بالنقطتين أ(−5، 2)، ب(3، 2)

**تدريب:** جد زاوية ميل المستقيم المار بالنقطتين أ(−3، 2)، ب(−3، 0).

**يمكن استنتاج النتائج الآتية مما سبق:**

1) المستقيم الأفقي ميله (0) وزاوية ميله ( $0^\circ$ ).
2) المستقيم العمودي ميله غير معرّف وزاوية ميله ($90^\circ$).
3) ميل المستقيم $> 0$ $\Leftrightarrow$ زاوية ميل المستقيم حادة.
4) ميل المستقيم $< 0$ $\Leftrightarrow$ زاوية ميل المستقيم منفرجة.

## 8-5 معادلة الخط المستقيم:




معادلة المستقيم هي علاقة جبرية تربط بين إحداثيي أي نقطة تقع على ذلك المستقيم، ولإيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ(س1، ص1) وميله (م) نفرض نقطة على المستقيم مثل (س، ص).

فيكون: م = $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$

أي أنّ: ص – ص1 = م(س – س1)

مثال: جد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ (1، – 3) وميله 4.

الحل: ص – – 3 = 4(س – 1)

ص + 3 = 4 س – 4

∴ ص = 4 س – 7

مثال: جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين هـ(0، – 5)، و(1، 0)

الحل: $م_{هـ و} = \frac{0 - -5}{1 - 0} = \frac{5}{1} = 5$

ص – – 5 = 5(س – 0)

ص + 5 = 5 س

∴ ص = 5س – 5

مثال: جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (–1، 6) وزاوية ميله 60°.

الحل: م = ظا 60° = $\sqrt{3}$

ص – 6 = $\sqrt{3}$ (س – –1)

ص – 6 = $\sqrt{3}$ س + $\sqrt{3}$

ص = $\sqrt{3}$ س + $\sqrt{3}$ + 6

تدريب: جد معادلة المستقيم في كل حالة مما يأتي:

1) ميله $\frac{3}{2}$ ويمرّ بالنقطة أ(0، – 8).

2) يمرّ بالنقطتين أ(– 2، 5)، ب(3، – 10).

3) زاوية ميله 135° ويمرّ بالنقطة أ(– 3، 4).

**مثال:** بيّن أن النقط أ(2، 3)، ب(−1، 4)، جـ(− 7، 6) تقع على استقامة واحدة.

**الحل:** نجد معادلة المستقيم أ ب:

$$م_{أب} = \frac{4 - 3}{-1 - 2} = \frac{1}{-3}$$

$$ص - 3 = \frac{-1}{3}(س - 2)$$

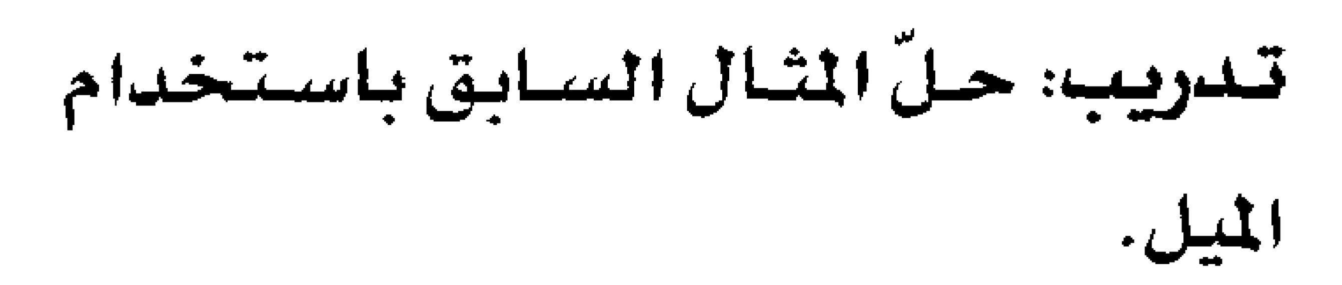
$$ص - 3 = \frac{-1}{3}س + \frac{2}{3}$$

$$ص = \frac{-1}{3}س + \frac{11}{3}$$

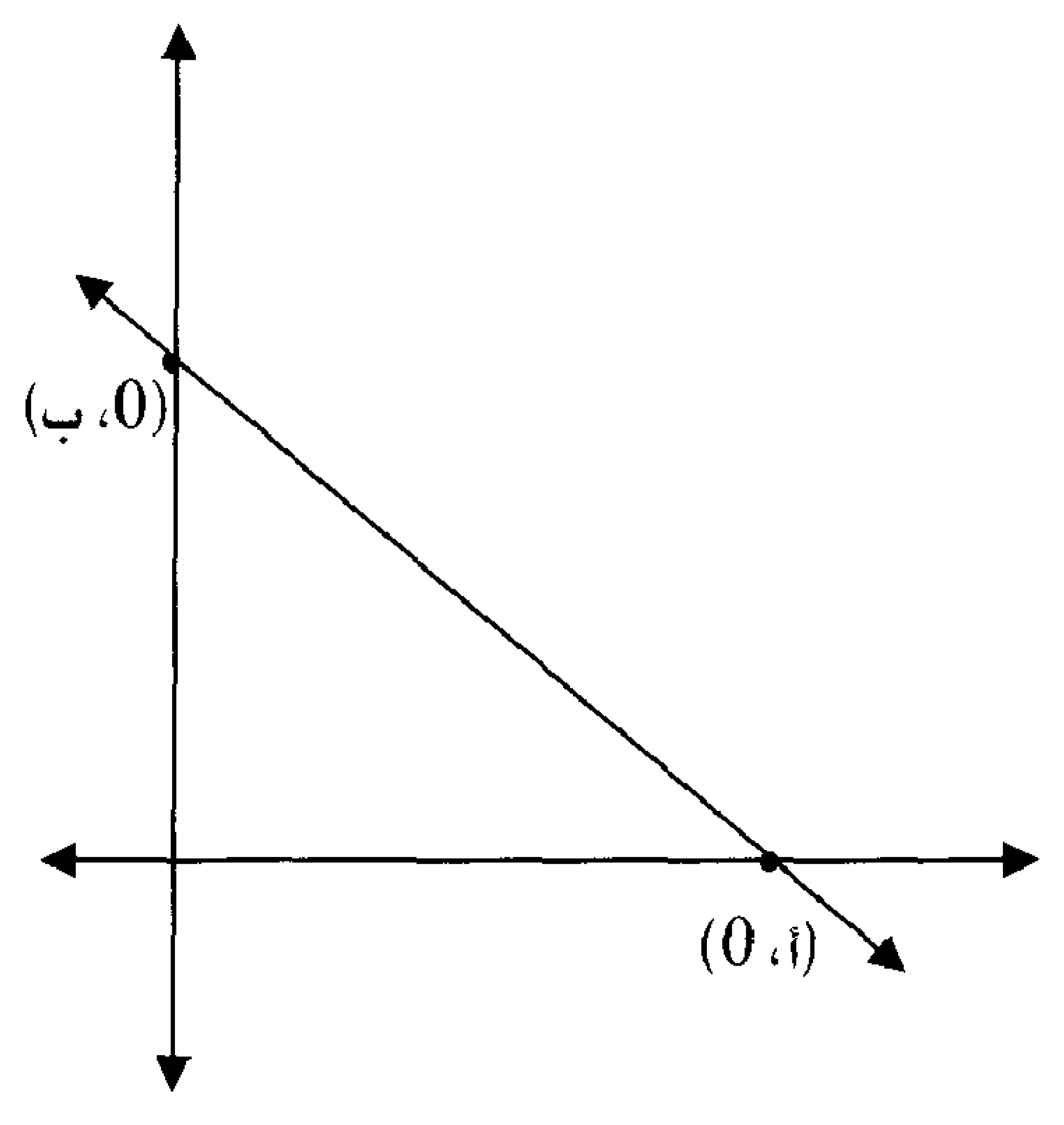
نعوّض النقطة جـ(− 7، 6) في معادلة المستقيم أ ب:

$$6 \overset{?}{=} \frac{-1}{3}(-7) + \frac{11}{3} = 6$$

∴ النقطة جـ تحقق معادلة المستقيم أ ب، وهذا يعني أن النقطة جـ تقع على المستقيم أ ب، أي أن النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.



**تدريب:** حلّ المثال السابق باستخدام الميل.




◈ **معادلة المستقيم بدلالة المقطعين من المحورين الإحداثيين:**

إذا قطع مستقيم محوري السينات والصادات في نقطتين كما

في الشكل المجاور، فإن نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي (أ، 0)، ونقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (0، ب)

تسمّى القيمة أ: المقطع السيني للمستقيم، أي أن المقطع السيني للمستقيم هو الإحداثي السيني لنقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات.

وتسمّى القيمة ب: المقطع الصادي للمستقيم، أي أن المقطع الصادي للمستقيم هو الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات.

**تدريب:** بيّن أن معادلة المستقيم الذي مقطعه السيني أ والصادي ب هي:

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = 1$$

**مثال:** أوجد معادلة المستقيم الذي مقطعه السيني 3 والصادي −5.

**الحل:** $\frac{س}{3} + \frac{ص}{-5} = 1$

$\therefore$ − 5س + 3ص = −15

**مثال:** أوجد المقطعين السيني والصادي للمستقيم الذي معادلته:

$$2س - 4ص = 12$$

**الحل:** نكتب المعادلة على الصورة $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = 1$

بالقسمة على 12 ينتج أن:

$$\frac{2س}{12} - \frac{4ص}{12} = 1$$

$$\frac{س}{6} - \frac{ص}{3} = 1$$

$$\frac{س}{6} + \frac{ص}{-3} = 1$$

∴ المقطع السيني = 6 والمقطع الصادي = − 3.

**ويمكن حلّ المثال السابق باستخدام مفهوم المقطع السيني والصادي:**

**المقطع السيني للمستقيم ← (أ، 0) تحقق معادلة المستقيم:**

2أ − 4(0) = 12

∴ أ = 6

**المقطع الصادي للمستقيم← (0، ب) تحقق معادلة المستقيم:**

2(0) − 4 ب = 12

∴ ب = − 3

**مثال:** جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (4، 3) ومقطعه السيني −2

**الحل:** بما أن المقطع السيني = −2 فالنقطة (−2، 0) تقع على المستقيم،

أي أنه يوجد نقطتان تقعان على المستقيم، هما (4، 3)، (−2، 0)

$$\therefore \text{م} = \frac{3 - 0}{-2 - 4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ص} - 0 = \frac{1}{2}\,(\text{س} - -2)$$

$$\text{ص} = \frac{1}{2}\text{س} + 1$$

**تدريب:** أوجد معادلة المستقيم الذي ميله 4 ومقطعه الصادي $-1$.

### ◈ الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم:

يمكن التعبير عن الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم بالصورة:

أ س + ب ص + جـ = 0، حيث أحد العددين أ، ب على الأقل $\neq 0$.

**مثال:** اكتب المستقيم: 3ص = 4 س $-$ 7 بالصورة العامة، وحدّد قيم أ، ب، جـ.

**الحل:** 4 س $-$ 3 ص $-$ 7 = 0

4 س + $-3$ ص + $-7$ = 0

$\therefore$ أ = 4، ب = $-3$، جـ = $-7$.

**تدريب:** اكتب المستقيمات الآتية بالصورة العامة، وحدّد قيم أ، ب، جـ:

1) س = 5 ص + 1
2) $-$ 3 ص = 2
3) 5 س $-$ 1 = 0

- يمكن إيجاد ميل المستقيم من الصورة العامّة لمعادلة الخطّ المستقيم بكتابة المتغير س موضع القانون، فينتج أن:

$$ص = -\frac{أ}{ب}\left(س + \frac{جـ}{أ}\right) = \frac{-أ}{ب}س - \frac{جـ}{ب}$$

ويكون الميل هو $-\frac{أ}{ب}$ ، أي أن ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

**مثال:** أوجد ميل المستقيم الذي معادلته 5س = 10ص − 15

**الحل:** نكتب المعادلة بالصورة العامة:

5 س + (− 10) ص + 15 = 0

فيكون الميل = $\frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$

**مثال:** ما قيمة ل التي تجعل المستقيم ص = (ل − 2) س + 3 أفقياً؟

**الحل:** ميل المستقيم = (ل − 2) لماذا؟

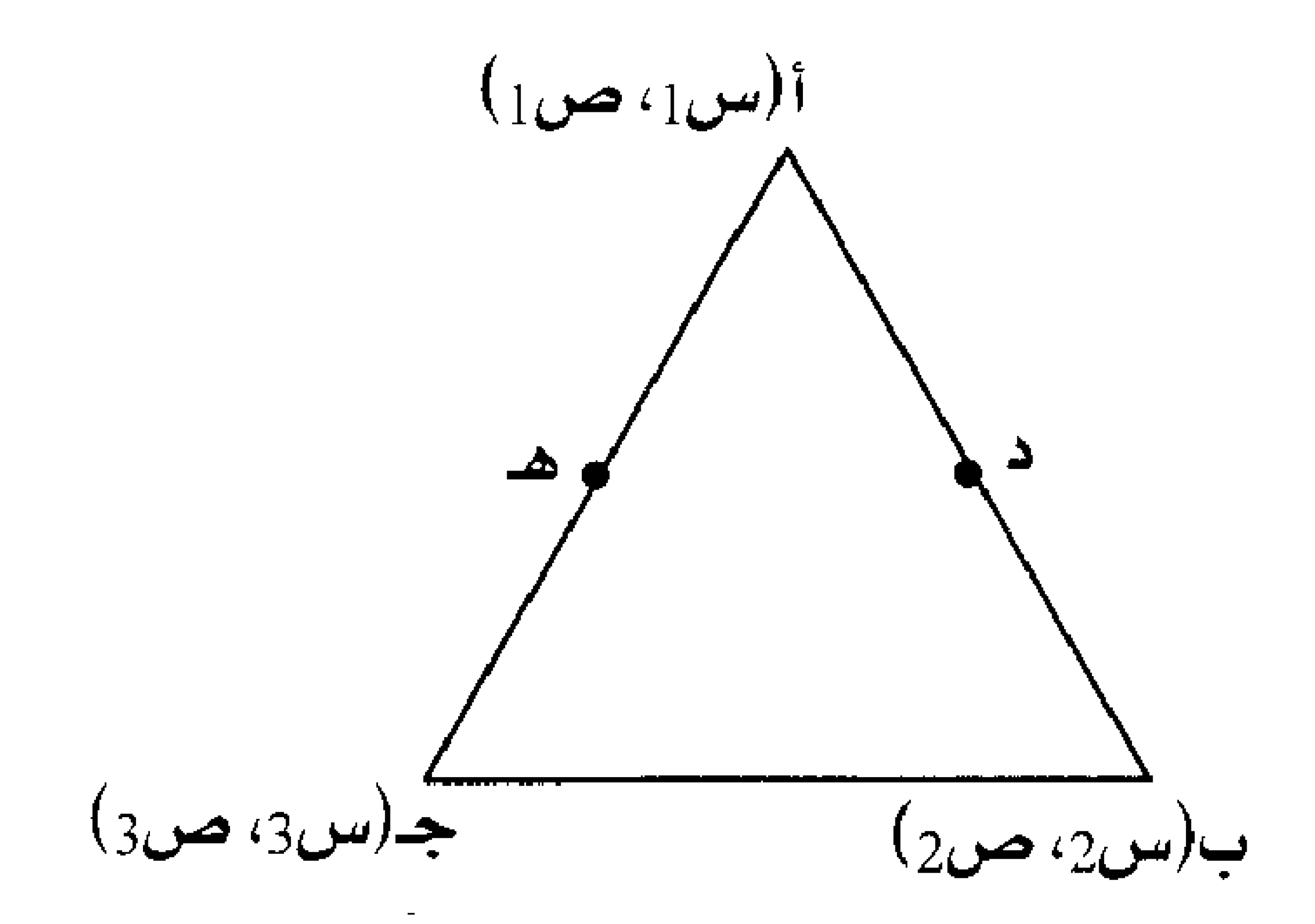
حتى يكون المستقيم أفقياً فإن الميل يساوي صفراً.

∴ ل − 2 = 0     وهذا يعني أن ل = 2

**تدريب:** أوجد معادلة المستقيم الذي ميله م ويمرّ بالنقطة (0، جـ).

**تطبيقات:**

- طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث، أي أنّه:




إذا كانت د منتصف أ ب

هـ منتصف أ جـ

فإنّ هـ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ.

مثال: إذا كانت أ(2، 5)، ب(−1، 3)، جـ(4، 1) رؤوس مثلث، جد طول القطعة الواصلة بين منتصفي أ ب، أ جـ.

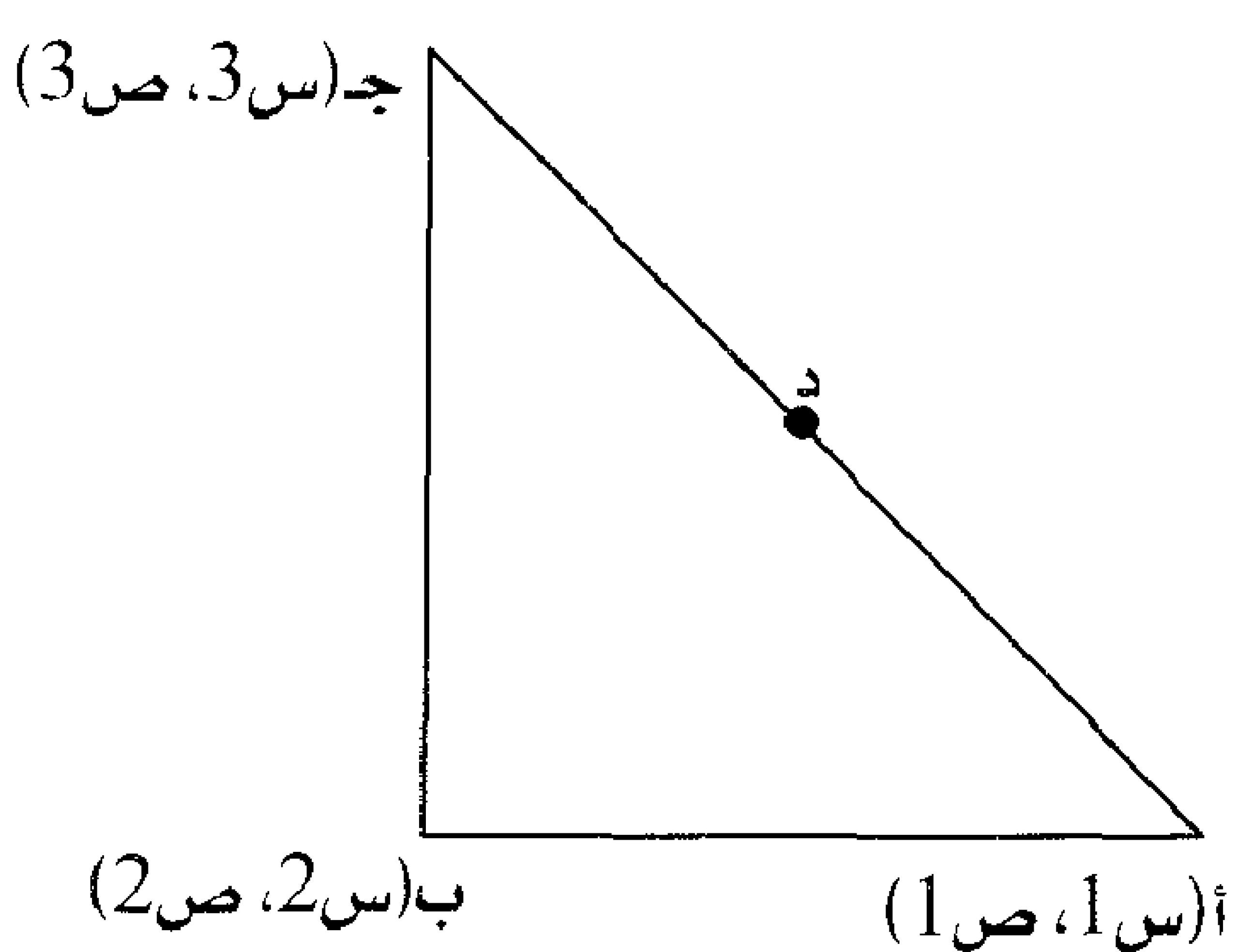
الحل: طول هـ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-1-4)^2 + (3-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{25+4} = \frac{1}{2}\sqrt{29}$$ وحدة طول

**تدريب:** تحقّق من الحل بإيجاد إحداثيي منتصف أ ب، أ جـ وتطبيق المسافة بينهما.

♦ طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس القائمة ومنتصف الوتر في المثلث قائم الزاوية، يساوي نصف طول الوتر، أي أنّه:




إذا كانت د منتصف أ جـ فإنّ:

ب د = $\frac{1}{2}$ أ جـ.

مثال: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ(5، 1)، ب(2، 1)، جـ(2، 5)، د منتصف أ جـ، جد طول ب د.

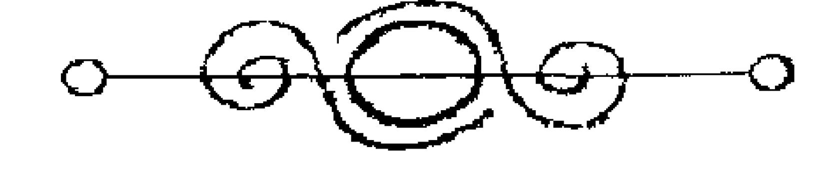
الحل: طول ب د = $\frac{1}{2}$ أ جـ

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(2-5)^2 + (5-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{9+16}$$

= $\frac{1}{2} \times 5 = 2.5$ وحدة طول.

تدريب: تحقّق من الحل بإيجاد إحداثيي منتصف أ جـ وتطبيق المسافة بينها وبين النقطة ب.



## 8 – 6 التوازي والتعامد

♦ يتوازى المستقيمان $ل_1$، $ل_2$ إذا وفقط إذا كان ميل المستقيم $ل_1$ يساوي ميل المستقيم $ل_2$، أي أنّ:

$$ل_1 // ل_2 \Leftrightarrow م_{ل_1} = م_{ل_2}$$

مثال: إذا كانت أ(4، 1)، ب(–2، 3)، جـ(0، 5)، د(3، 4) بيّن أنّ أ ب // جـ د

الحل:

$$م_{أب} = \frac{3-1}{-2-4} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

$$م_{جـد} = \frac{4-5}{3-0} = \frac{-1}{3}$$

بما أن $م_{أب} = م_{جـد} \Leftarrow$ أ ب // جـ د

تدريب: إذا كانت أ(–2، 1)، ب(0، 3)، جـ(1، – 3)، د(2، ص)، جد قيمة ص التي تجعل المستقيم أ ب يوازي المستقيم جـ د.

♦ يتعامد المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$ إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي –1، أي أن: $ل_1 \perp ل_2 \Leftrightarrow م_{ل_1} \times م_{ل_2} = -1$

مثال: إذا كانت أ(–1، 2)، ب(2، 8)، جـ(–2، 0)، د(0، –1) بيّن أن أ ب $\perp$ جـ د.

الحل:

$$م_{أب} = \frac{8-2}{2--1} = \frac{6}{3} = 2$$

$م_{جد} = \frac{-1-0}{0 - -2} = \frac{-1}{2}$

$م_{أب} \times م_{جد} = \frac{2}{1} \times \frac{-1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

∴ أ ب ⊥ جـ د

**تدريب:** أوجد ميل المستقيم الذي يعامد المستقيم المار بالنقطتين أ(1، − 4)، ب (−3،1)

**مثال:** بيّن باستعمال الميل أن النقط س(3، 2)، ص(1، 4)، ع(0، 3) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية.

**الحل:**

$م_{س ص} = \frac{4-2}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$

$م_{س ع} = \frac{3-2}{0-3} = \frac{1}{-3}$

$م_{ص ع} = \frac{2-4}{0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$

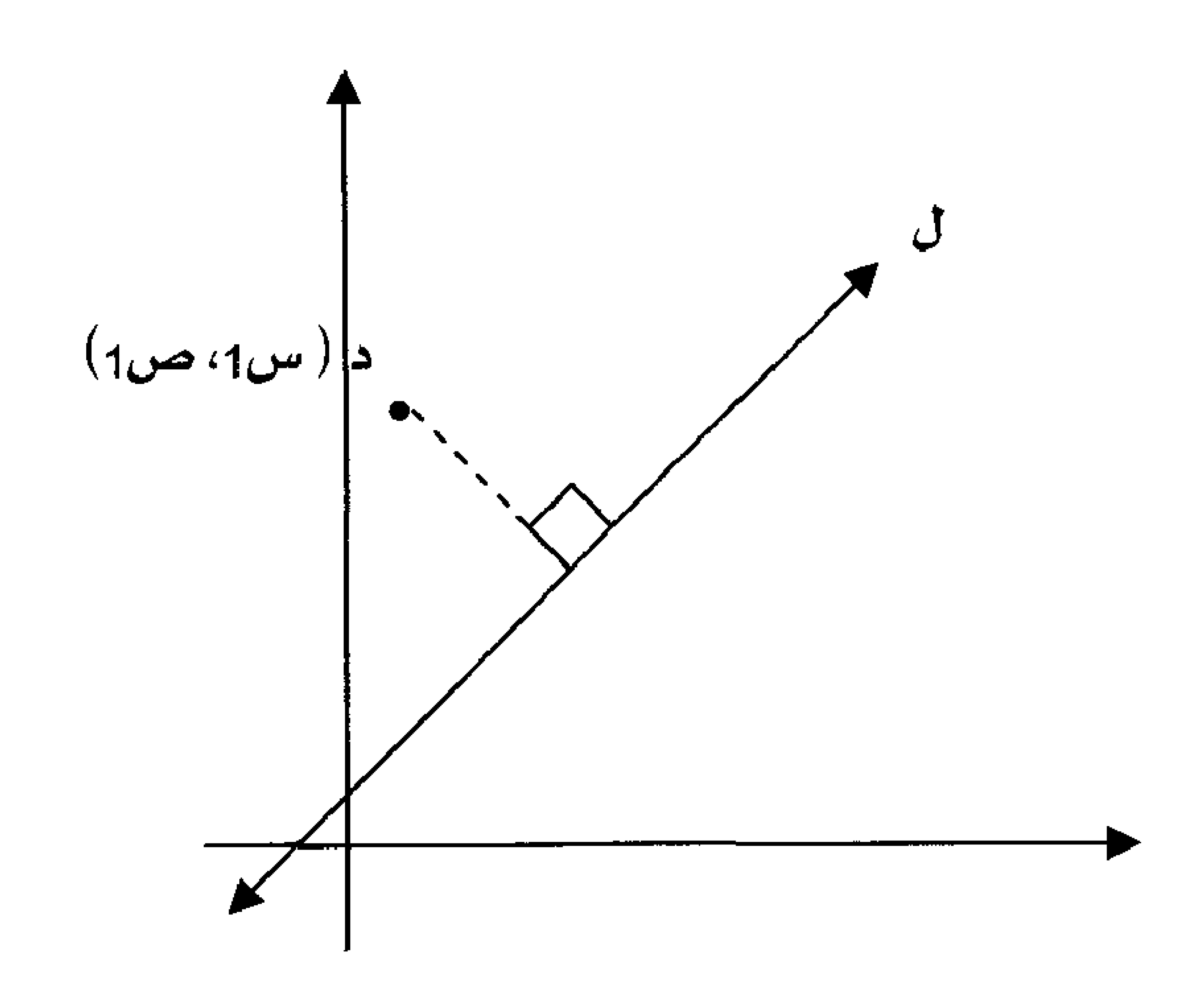
بما أن $م_{س ع} \times م_{ص ع} = -1 \times 1 = -1$ فإن س ص ⊥ ص ع

∴ النقاط س، ص، ع هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ص.

**تدريب:** بيّن باستعمال الميل أن النقط أ(1، 1)، ب(7، 1)، جـ(5، 3)، د(2، 3) هي رؤوس شبه منحرف



## 8-7 البُعد بين نقطة ومستقيم:




البُعد بين النقطة د والمستقيم ل هو طول العمود النازل من النقطة د على المستقيم ل.

ويعطى البُعد بين النقطة د($س_1$، $ص_1$) والمستقيم ل الذي معادلته: أ س + ب ص + جـ = 0 بالعلاقة الآتية:

$$\text{البعد بين النقطة د والمستقيم ل} = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

مثال: جد البُعد بين النقطة (1− ، 3 ، 2) والمستقيم 4س − 3 ص + 5 = 0

الحل: البُعد $= \frac{|5+(2\times3-)+(3-\times4)|}{\sqrt{^2(4) + ^2(3-)}}$

$= \frac{|5+6-+12-|}{\sqrt{9+16}}$

$= \frac{13}{5} = 2.6$ وحدة طول

تدريب: جد البُعد بين النقطة هـ($-4$، $0$) والمستقيم الذي معادلته
ل: $12$س + $5$ص $-7 = 0$

مثال: جد البُعد بين النقطة ع($1$، $-5$) والمستقيم الذي معادلته:

ل: $4$ س + ص + $1 = 0$

الحل: لاحظ أن النقطة ع تحقق معادلة المستقيم ل، أي أن النقطة ع تقع على المستقيم ل، وهذا يعني أن بُعد النقطة ع عن المستقيم ل يساوي صفراً.

(استخدم قانون البُعد بين نقطة ومستقيم للتحقّق من الحل).

مثال: جد البُعد بين المستقيمين المتوازيين:

$ل_1$: $5$س $-$ $12$ص = $5$

$ل_2$: $5$س $-$ $12$ص = $-8$

الحل: نعيّن نقطة على أحد المستقيمين، وليكن $ل_1$ ونجد بُعدها عن المستقيم الآخر.

عندما ص = $0$ ← $5$س $-$ $12(0)$ = $5$

$5$س = $5$

س = $1$

أي أن النقطة ($1$، $0$) تقع على المستقيم $ل_1$

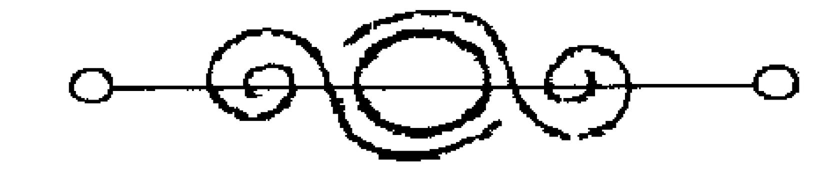
نجد بُعد النقطة (1، 0) عن المستقيم ل2 : 5س – 12ص = – 8

$$\text{البُعد} = \frac{|(5\times1)+(-12\times0)+8|}{\sqrt{(5)^2+(-12)^2}}$$

$$= \frac{|5+0+8|}{\sqrt{25+144}}$$

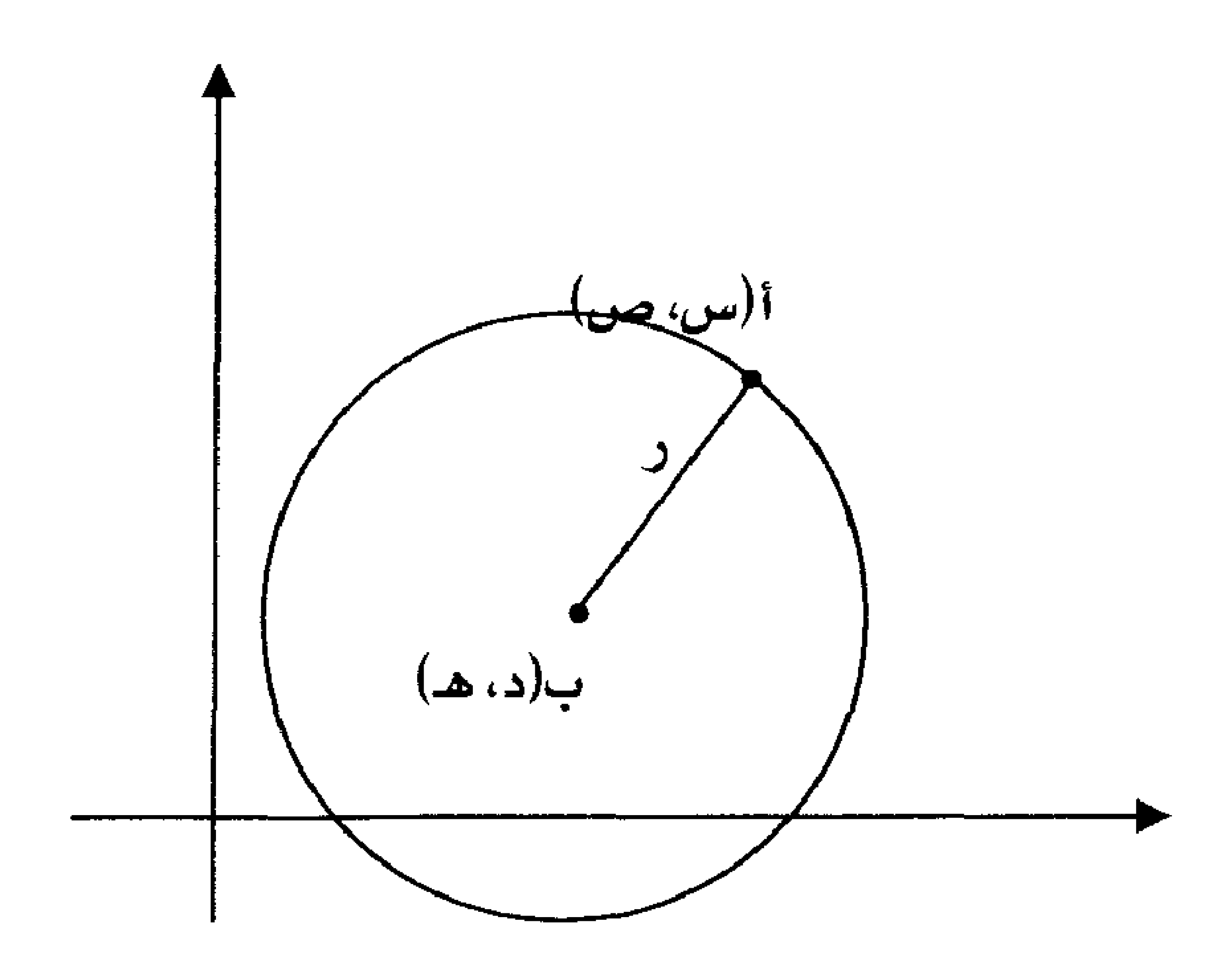
$$= \frac{13}{13} = 1 \text{ وحدة طول}$$

تدريب: حل المثال السابق بتعيين نقطة على المستقيم ل2 وإيجاد بُعدها عن المستقيم ل1.



### 8-8 معادلة الدائرة:

الدائرة هي مجموعة النقط في المستوى التي تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة، وهي المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى على بعد ثابت من نقطة ثابتة.




تسمّى النقطة الثابتة ب: مركز الدائرة.

ويسمّى البعد الثابت ر: نصف قطر الدائرة

وباستخدام قانون المسافة بين النقطتين أ، ب

ينتج أن: $\sqrt{(س-د)^2+(ص-هـ)^2} = ر$

أي أن: $(س-د)^2 + (ص-هـ)^2 = ر^2$

هي معادلة الدائرة التي مركزها (د، هـ) ونصف قطرها ر.

مثال: جد معادلة الدائرة التي مركزها (3، −2) ونصف قطرها 4 وحدات

الحل: $(س-3)^2 + (ص--2)^2 = (4)^2$

$(س-3)^2 + (ص+2)^2 = 16$

**مثال: جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها:**

$$(س + 1)^2 + (ص - 7)^2 = 36$$

**الحل: نكتب معادلة الدائرة على الصورة:**

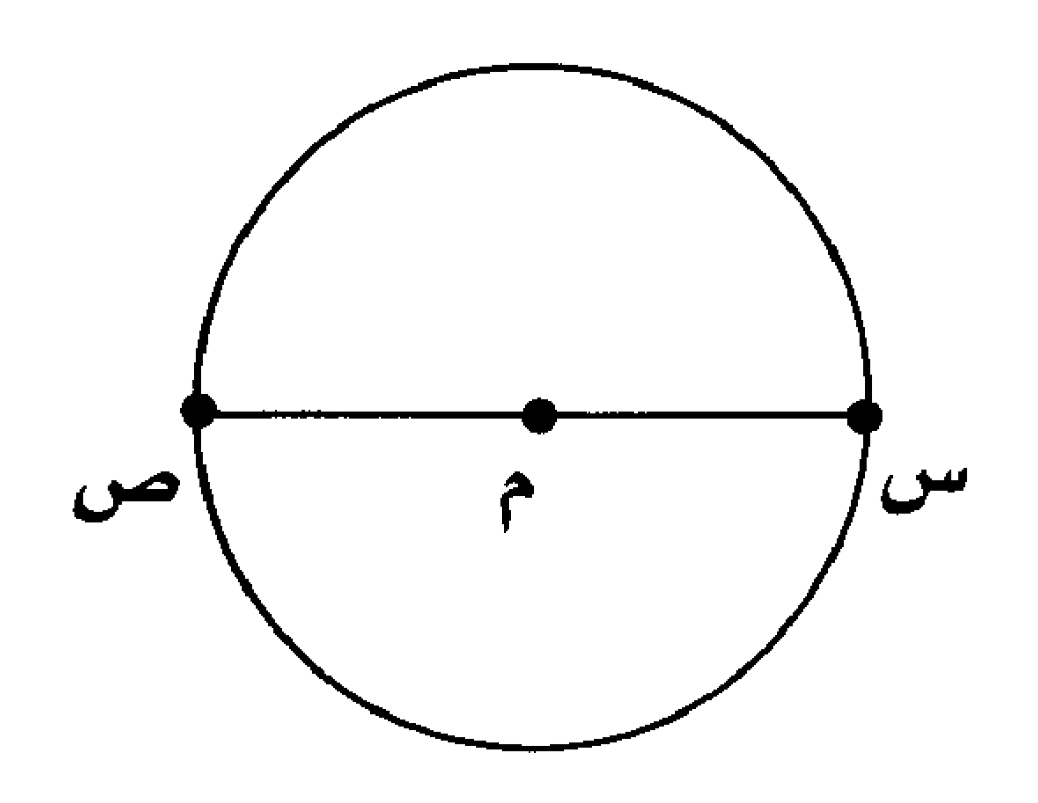
$$(س - -1)^2 + (ص - 7)^2 = (6)^2$$

**أي أن مركز الدائرة** = (−1، 7)

**ونصف قطر الدائرة** = 6

**مثال: جد معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها هما النقطتان: س(1، 3)، ص(−3، 7)**

**الحل: مركز الدائرة هو إحداثيا منتصف القطعة المستقيمة س ص**




$$م\left(\frac{1+-3}{2}، \frac{3+7}{2}\right) = م\ (-1، 5)$$

**نصف قطر الدائرة هو المسافة بين النقطة م، والنقطة س أو النقطة ص.**

$$ر = م\,س = \sqrt{(1--1)^2+(3-5)^2}$$

$$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$ **وحدة طول**

∴ **معادلة الدائرة هي:**

$$(س - -1)^2 + (ص - 5)^2 = (\sqrt{8})^2$$

أي (س + 1)$^2$ + (ص − 5)$^2$ = 8

**تدريب:** أوجد معادلة الدائرة في كلّ حالة من الحالات الآتية:

1) مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها وحدة واحدة.
2) مركزها (−1، 4) وتمرّ بالنقطة (3، 0)
3) مركزها (5، 2) وتمسّ محور السينات.
4) نصف قطرها 3 وحدات وتمسّ المحورين وتقع في الربع الثاني.

♦ **الصورة القياسية لمعادلة الدائرة:**

إن فك الأقواس في معادلة الدائرة التي مركزها (د، هـ) ونصف قطرها ( ر) والتي معادلتها: (س − د)$^2$ + (ص − هـ)$^2$ = ر$^2$

ينتج عنه أن: س$^2$+ص$^2$ − 2 د س − 2هـ ص + د$^2$ + هـ$^2$ − ر$^2$ = 0

ويفرض أن: − د = ل، − هـ = ك، د$^2$ + هـ$^2$ − ر$^2$ = جـ ينتج الصورة القياسية لمعادلة الدائرة، وهي:

س$^2$ + ص$^2$ +2ل س + 2 ك ص + جـ = 0

ويكون مركز الدائرة (− ل، − ك)

ونصف قطر الدائرة = $\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - \text{جـ}}$

**مثال:** جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها:

س$^2$ + ص$^2$ − 8س + 6 ص − 11 = 0

الحل: بمقارنة المعادلة بالصورة القياسية نجد أن:

2ل = - 8 $\Leftarrow$ ل = - 4

2ك = 6 $\Leftarrow$ ك = 3

أي أنّ مركز الدائرة = (4، – 3)

ونصف قطر الدائرة (ر) = $\sqrt{(-4)^2 + (3)^2 - (-11)}$

= $\sqrt{36}$

= 6 وحدات طول

مثال: جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها:

3س$^2$ + 3ص$^2$ + 18ص = – 24

الحل: نحوّل المعادلة إلى الصورة القياسية بقسمة طرفي المعادلة على 3

فينتج: س$^2$ + ص$^2$ + 0س + 6ص + 8 = 0

2ل = 0 $\Leftarrow$ ل = 0

2ك = 6 $\Leftarrow$ ك = 3

المركز = (0، - 3)

ر = $\sqrt{(0)^2 + (3)^2 - 8}$

= 1 وحدة طول

**تدريب:** جد البعد بين النقطة (−5، 2) ومركز الدائرة التي معادلتها:

$$س^2 + ص^2 - 5س + 7ص - 3 = 0$$

**مثال:** إذا كانت الدائرة التي معادلتها س2 + ص2 + أس + ب ص = 0 تمرّ بالنقطتين (2، 0)، (3، −1) فما قيمة كل من أ، ب؟

**الحل:** بما أن الدائرة تمرّ بالنقطة (2، 0) فالنقطة تحقق معادلة الدائرة، أي أن:

$$(2)^2 + (0)^2 + أ(2) + ب(0) = 0$$

$$4 + 2أ = 0$$

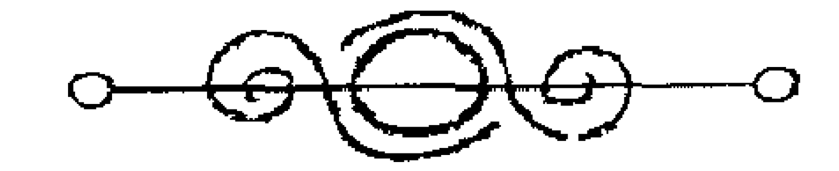
$$\Leftarrow أ = -2$$

بما أن الدائرة تمرّ بالنقطة (3،−1) فالنقطة تحقق معادلة الدائرة،

أي أن: $(3)^2 + (-1)^2 + -2(3) + ب(-1) = 0$

$$9 + 1 - 6 - ب = 0$$

$$\Leftarrow ب = 4$$



## 8 – 9 أسئلة للمناقشة:

1. ارسم محورين متعامدين على ورقة رسم بياني، وعيّن في المستوى الديكارتي النقط: أ(–1، 3)، ب(0، 5)، جـ(4، 0)، د(–4، –5)

2. إذا كانت أ(–1، 6)، ب (2، 9) جد:

   1) طول القطعة المستقيمة أ ب.
   2) إحداثيي منتصف القطعة المستقيمة أ ب.
   3) ميل المستقيم أ ب.
   4) معادلة المستقيم أ ب

3. بيّن بثلاث طرق مختلفة أنّ النقاط أ(0، –2)، ب(1، 3)، جـ(2، 8) تقع على استقامة واحدة.

4. إذا كانت أ(1، 1)، ب(5، 1)، جـ(7، 3)، د(3، 3)، أثبت أنّ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع.

5. إذا كانت هـ زاوية ميل المستقيم، حيث جاهـ= $\frac{5}{13}$، أوجد ميل المستقيم، حيث 0°< هـ< 90°

6. أوجد المقطعين السيني والصادي للمستقيم الذي معادلته 3س + 7ص = 42

7. أوجد ميل المستقيم الذي يعامد المستقيم المارّ بالنقطتين أ(– 3، 5)، ب(1، 4).

8. أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (1، – 3) وتمسّ المستقيم 2س – 4ص = 5

9. أوجد البُعد بين المستقيمين المتوازيين:

   ل$_1$: 4س – 7ص = 8

   ل$_2$: 4س – 7ص = –3

10. لتكن معادلة الدائرة: $س^2 + ص^2 +$ أس $+ 6ص - 6 = 0$

1) أوجد قيمة أ التي تجعل نصف قطر الدائرة 4 وحدات.
2) اعتماداً على الفرع (1) أوجد مركز الدائرة.

## الفصل التاسع

# التحويلات الهندسية

---

# الفصل التاسع

# الفصل التاسع

# التحويلات الهندسية

## 9–1 مفهوم التحويل الهندسي:

التحويل الهندسي هو اقتران شامل وواحد لواحد من مجموعة النقاط في المستوى إلى المجموعة نفسها، ويرمز له بالرمز ت(س، ص)، حيث (س، ص) نقطة في المستوى الديكارتي.

مثال: إذا كان ت(س، ص) = (س + 3، ص – 2)، صف التحويل الهندسي.

الحل: التحويل الهندسي هو اقتران يربط كل نقطة في المستوى الديكارتي مثل (س، ص) بنقطة في المستوى مثل (س$_1$، ص$_1$)، حيث أن:

س$_1$ = س + 3

ص$_1$ = ص – 2

مثال: إذا كان ت(س، ص) = (2س – 1، 3ص + 4) تحويلاً هندسياً، أوجد ت(1، 2)، ت(0، 0)، ت(–3، –2)

الحل:

ت (1، 2) = (2 × 1 –1، 3 × 2 +4) = (1، 10)

ت (0، 0) = (2 × 0 –1، 3 × 0 +4) = (– 1، 4)

ت (–3، –2) = (2 × –3 –1، 3 × –2 +4) = (–7، –2)

**مثال:** إذا كان ت(س، ص) = (5س – 2، ص – 3) تحويلاً هندسياً، وكانت النقطة أ في المستوى صورتها هي أَ(8، 1)، فما إحداثيا النقطة أ ؟

**الحل:**

ت(س، ص) = (5 س – 2، ص – 3)

= (8 ، 1)

أي أن 5 س – 2 = 8

5 س = 10

⟸ س = 2

ص – 3 = 1

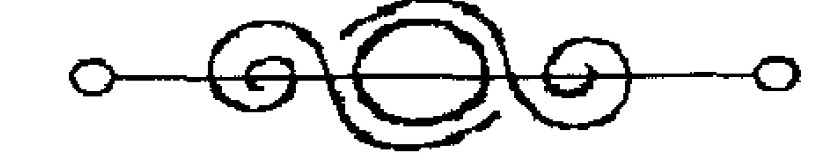
⟸ ص = 4

∴ أ(2، 4)

**تدريب:** إذا كان ت(س، ص) = (5 – س، 2ص + 7) تحويلاً هندسياً،

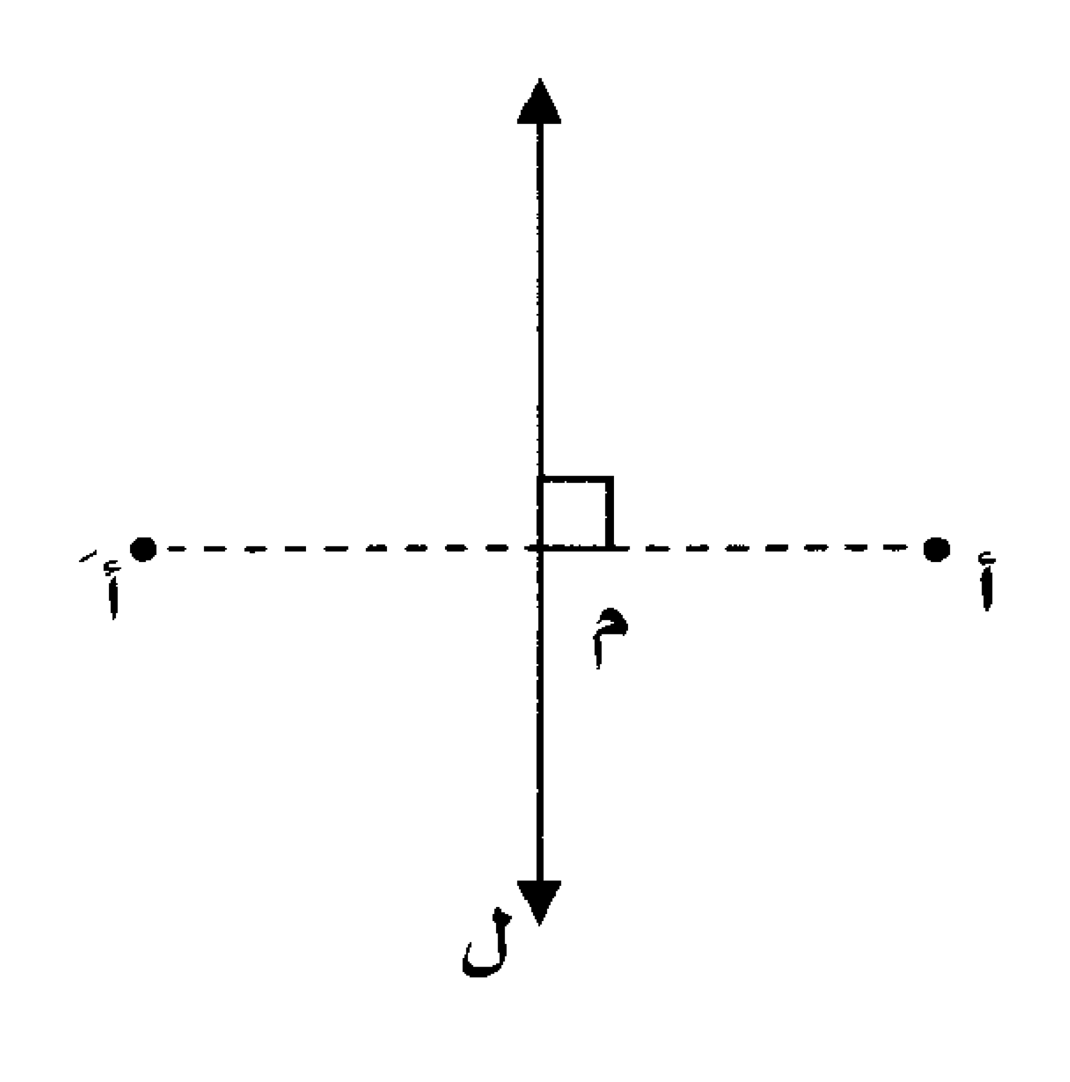
1) أوجد ت(4، –3)، ت(5، – 3.5)

2) إذا كان ت(س، ص) = (10، 15) فما قيمة (س، ص)؟



## 9 – 2 الانعكاس وخواصّه

إذا وقف شخص أمام المرآة المستوية فإن صورته تظهر خلف المرآة على بُعد يساوي بُعد الشخص عن المرآة.




في الشكل المجاور تكون صورة النقطة أ تساوي أَ، لاحظ أن المستقيم ل عمودي على القطعة المستقيمة أ أَ وينصّفها، أي أنّ أ م = م أَ

تسمّى النقطة أَ انعكاساً للنقطة أ، ويسمّى الخط المستقيم ل محور الانعكاس.

**تمرين:** إذا كانت النقطة ب تقع على محور الانعكاس ل، فما صورتها؟

**تعريف:** صورة النقطة أ(س، ص) بالانعكاس في محور السينات هي أَ(س، – ص).

**مثال:** جد صورة النقاط الآتية بالانعكاس في محور السينات:

أ(2، 3)، ب(–3، 1)، جـ(1، 0)، د(0، 2)

**الحل:**

أ(2، 3) ⟵ أ´(2، −3)

ب(−3، 1) ⟵ بَ(−3، −1)

جـ(1، 0) ⟵ جـ´(1، 0)

د(0، 2) ⟵ د´(0، −2)

**تعريف:** صورة النقطة أ(س، ص) بالانعكاس في محور الصادات هي أ´(− س، ص)

**مثال:** جد صورة النقاط الآتية بالانعكاس في محور الصادات:

أ (−2، 1)، ب(0، 3)، جـ(−3، −2)

**الحل:** أ (−2، 1) ⟵ أ´(2، 1)

ب (0، 3) ⟵ ب´(0، 3)

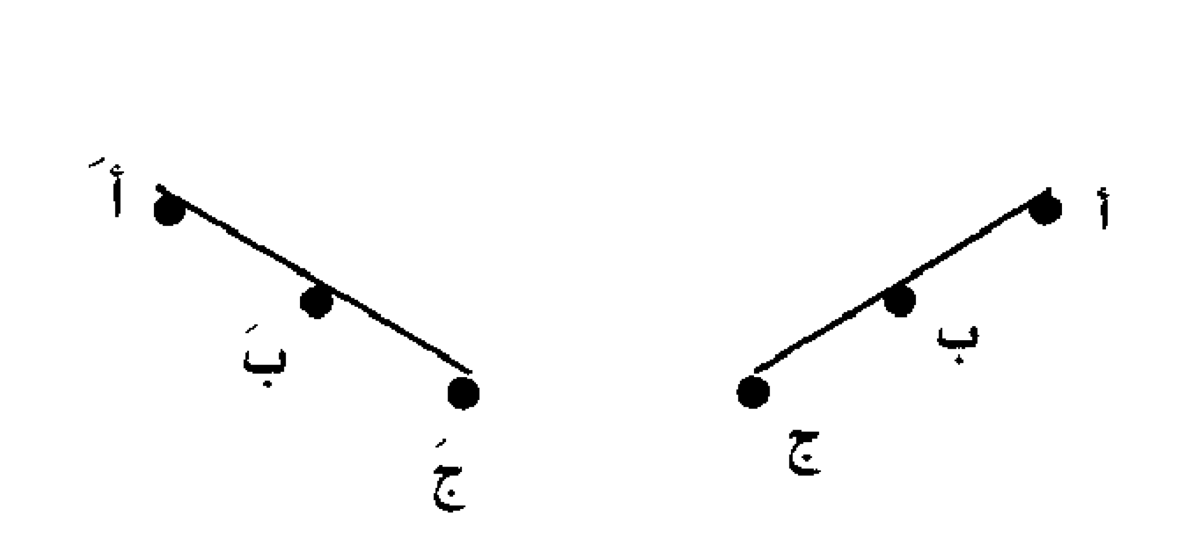
جـ(−3، −2) ⟵ جـ´(3، −2)

**تدريب:** أوجد صورة النقاط الآتية بالانعكاس في محور السينات ثم بالانعكاس في محور الصادات:

أ (−5، 1)، ب(0، −4)، جـ(2، 3)

**خواص الانعكاس:**

**مثال:** جد صورة النقاط المستقيمة أ(3، 1)، ب(2، 0)، جـ(1، –1) بالانعكاس في محور الصادات.




**الحل:** أ(3، 1) ← أَ(–3، 1)

ب(2، 0) ← بَ(–2، 0)

جـ(1، –1) ← جـَ(–1، –1)

**يمكن استنتاج خواص الانعكاس الآتية:**

1) الانعكاس يحافظ على الاستقامة:

النقاط أ، ب، جـ مستقيمة، وكذلك النقاط أَ، بَ، جـَ هي نقاط مستقيمة.

2) الانعكاس يحافظ على البينية:

النقطة ب تقع بين النقطتين أ، جـ، وكذلك النقطة بَ تقع بين النقطتين أَ، جـَ .

3) الانعكاس يحافظ على قياسات الأطوال:

أ ب = $\sqrt{(3-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ وحدة طول

أَبَ = $\sqrt{(-3--2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ وحدة طول

**تدريب:** قارن بين طولي أ جـ، أَ جـَ.

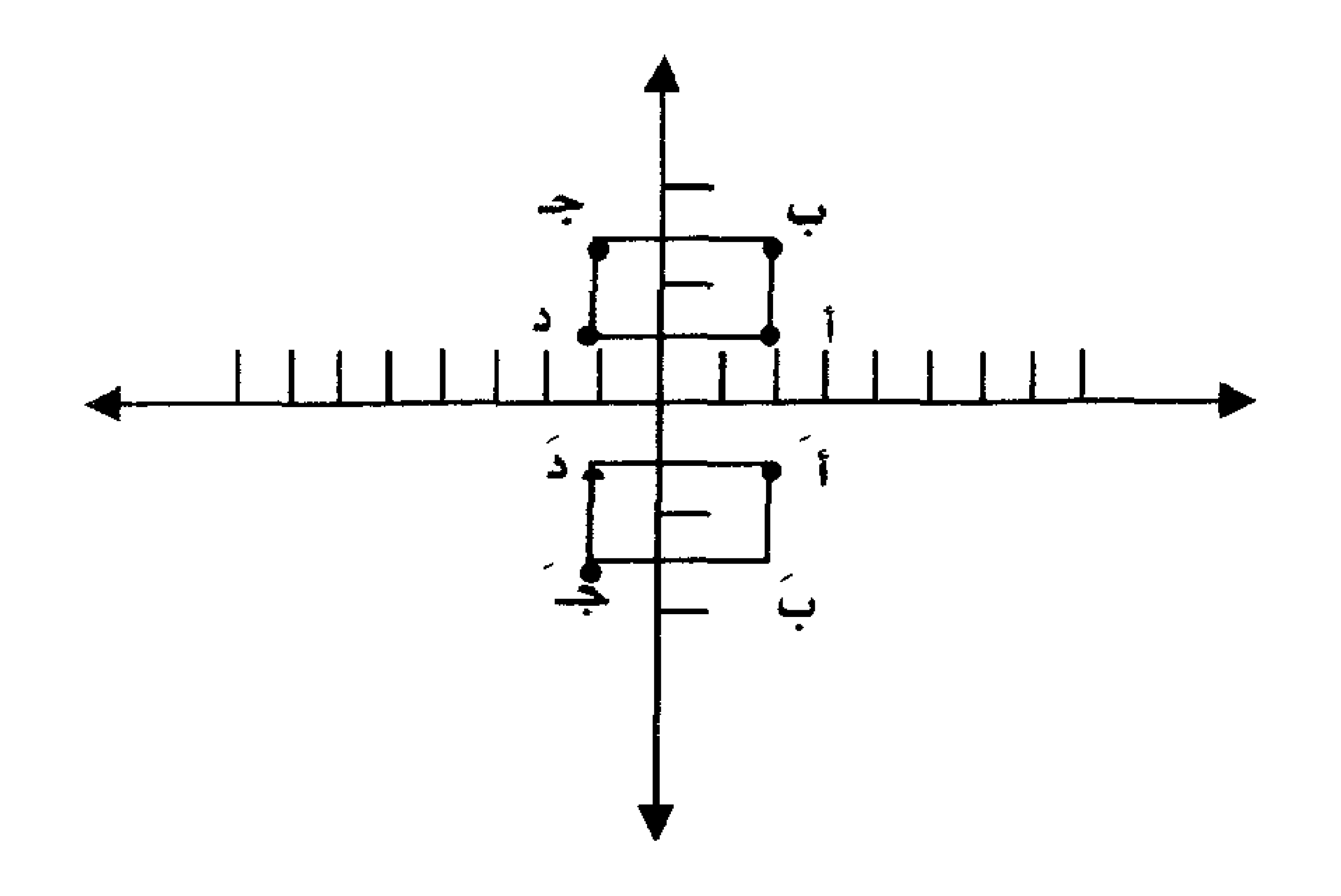
**4) الانعكاس يحافظ على قياسات الزوايا:**

**الزاوية أ ب جـ مستقيمة، وكذلك الزاوية أَ بَ جـَ هي زاوية مستقيمة.**

**مثال: جد صورة المستطيل أ ب جـ د بالانعكاس في محور السينات إذا كان:**

أ(2، 1)، ب(2، 3)، جـ(−1، 3)، د(−1، 1)

**الحل:**




أ(2، 1) ⟵ أَ(2، −1)

ب(2، 3) ⟵ بَ(2، −3)

جـ(−1، 3) ⟵ جـَ(−1، −3)

د(−1، 1) ⟵ دَ(−1، −1)

**5) الانعكاس يحافظ على التوازي:**

أ ب // جـ د وكذلك أَ بَ // جـَ دَ

أ د // ب جـ وكذلك أَ دَ // بَ جـَ

6) الانعكاس يعكس الإتجاه الدوراني:

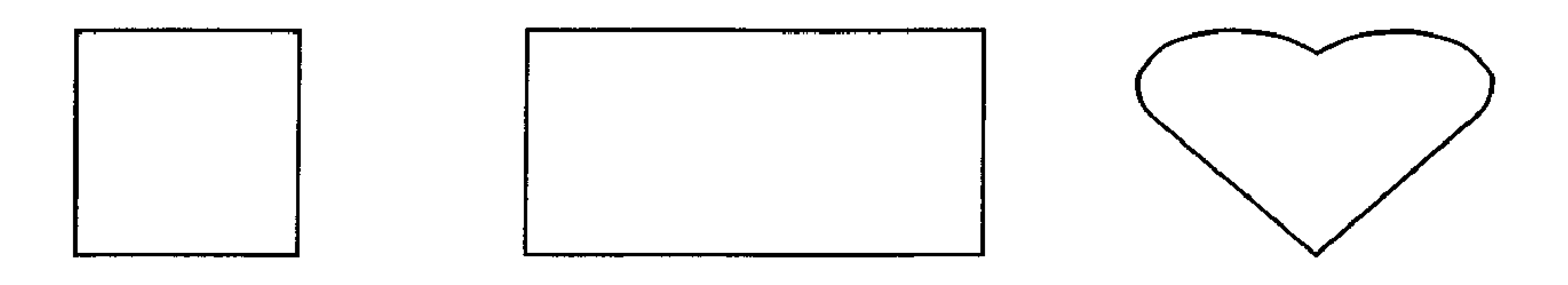
المستطيل الوارد في المثال السابق والذي يمكن تسميته بالدوران عكس عقارب الساعة يكون على الصورة أ ب جـ د، ولكن أ َ ب َ جـ َ د َ هو اتجاه دوراني مع عقارب الساعة، أي أن الانعكاس لا يحافظ على الإتجاه الدوراني.

تدريب: جد صورة المثلث س ص ع بالانعكاس في محور الصادات، إذا كانت س(–2، –1)، ص(4، 1)، ع(1، 5).

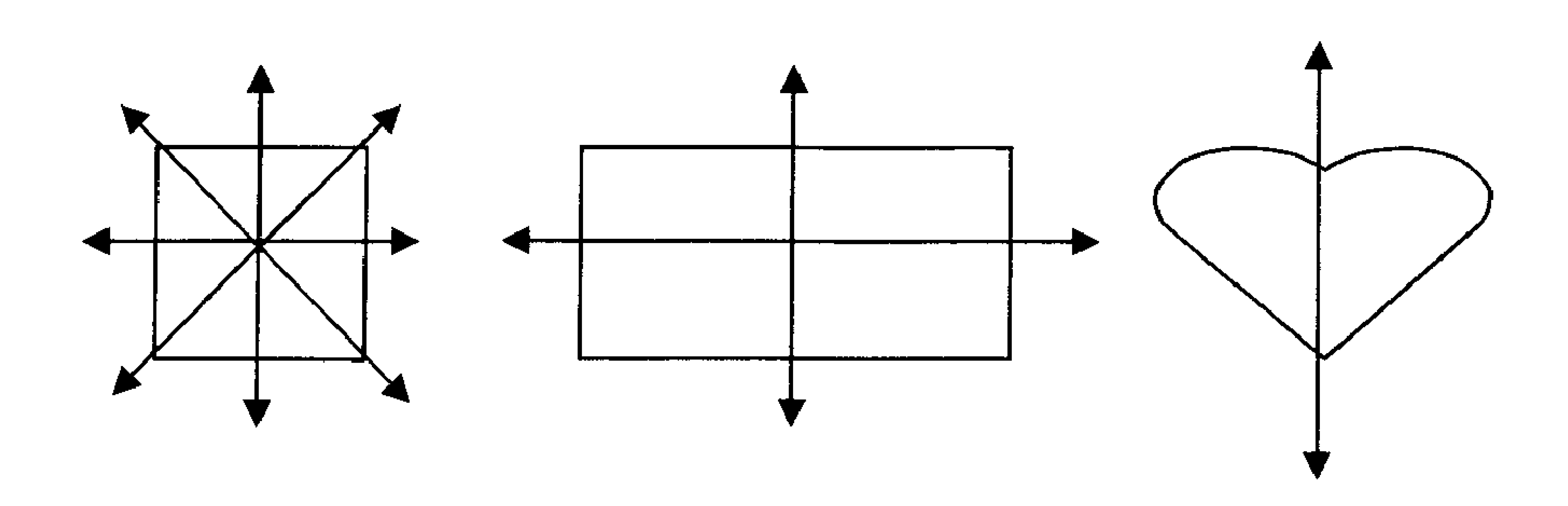
◈ **التماثل:**

يمكن وصف بعض الأشكال منتظمة الشكل عن طريق التماثل، والتماثل هو انعكاس يجعل شكلاً معيناً ينطبق على نفسه، أي أنّه يمكن طيّ بعض الأشكال حول محور محدد، يسمّى محور التماثل.

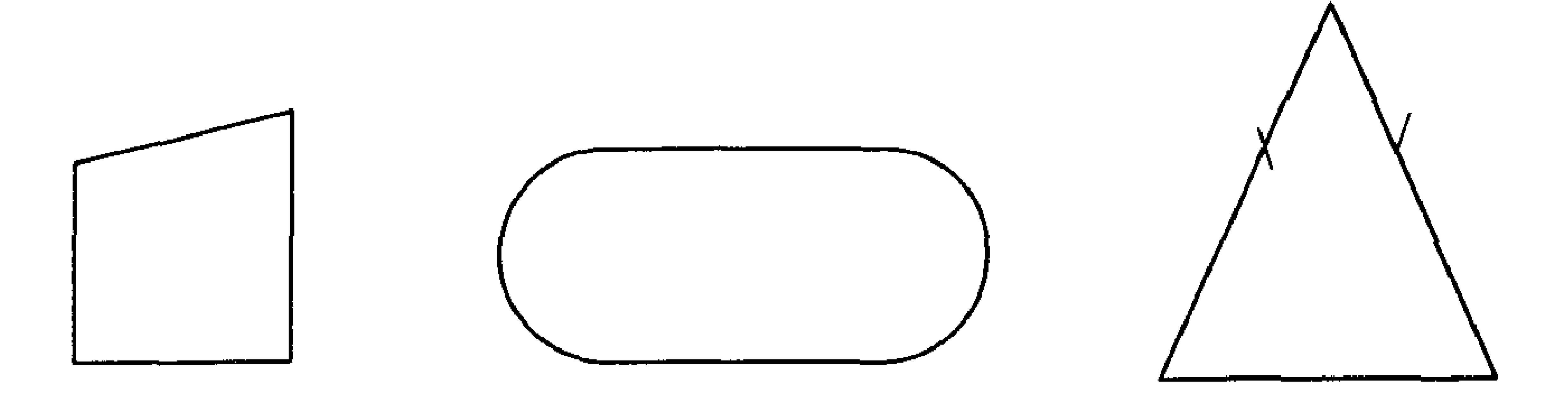
مثال: حدّد تماثلات الأشكال الآتية (إن وجدت):



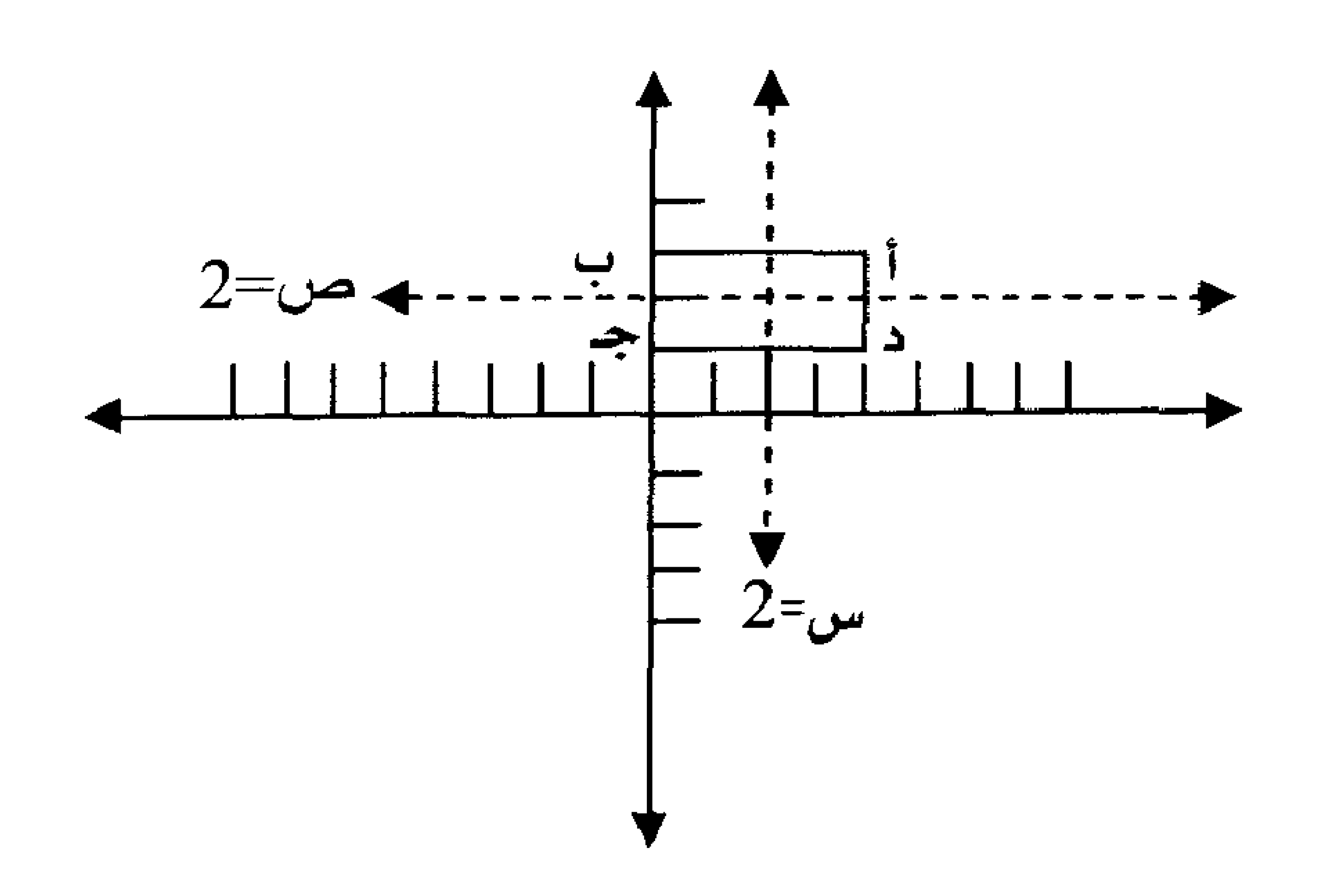
الحل:



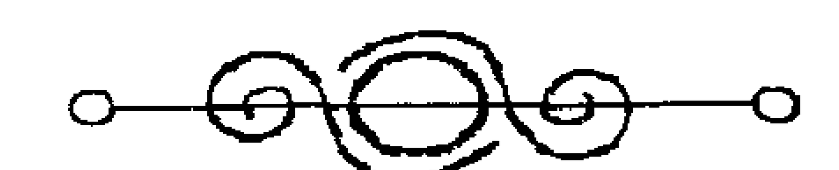
**تدريب:** حدّد تماثلات الأشكال الآتية (إن وجدت):



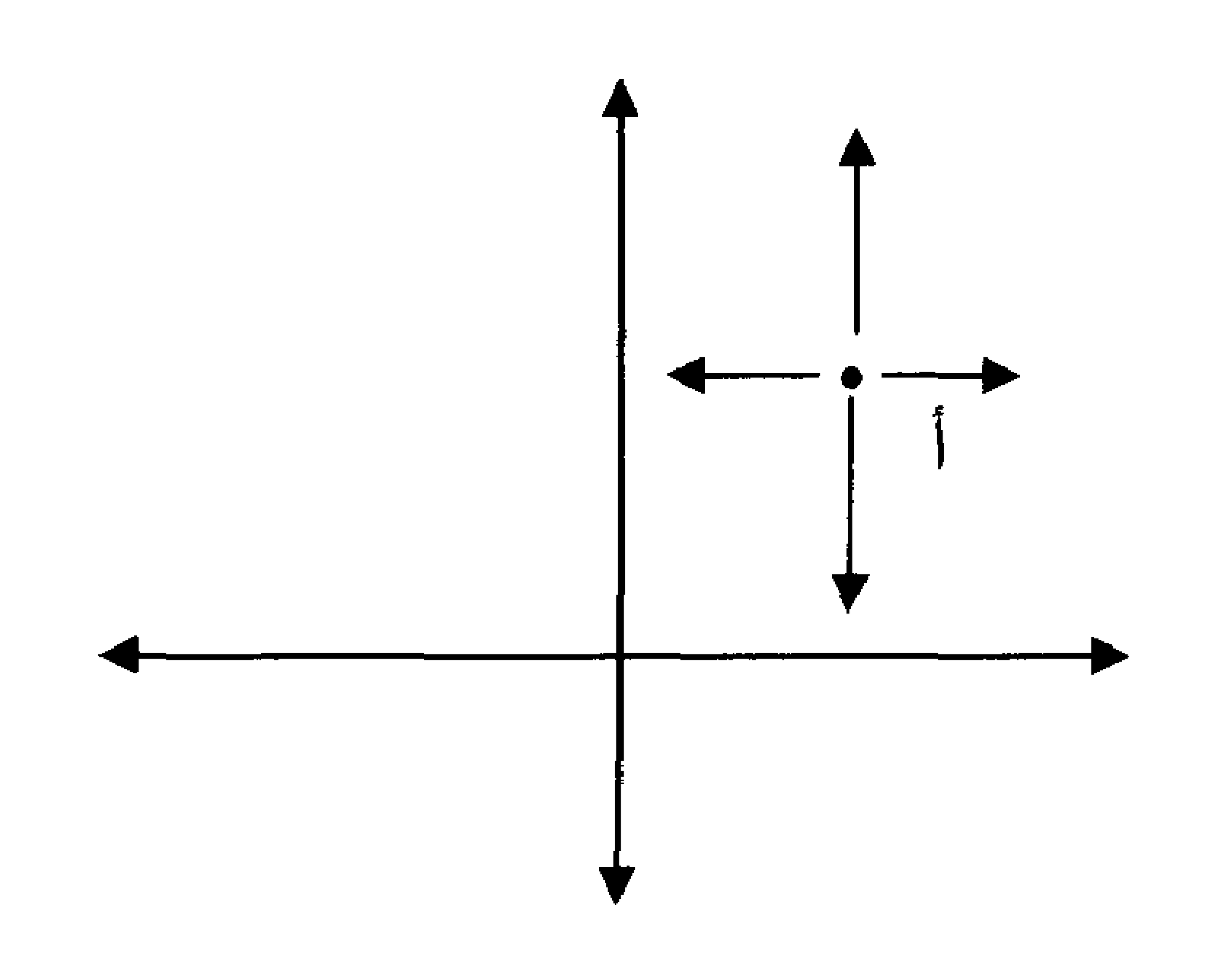
**مثال:** جد تماثلات المستطيل أ ب جـ د في الشكل المجاور.




**الحل:** يوجد تماثلان للمستطيل، هما بالانعكاس في المستقيم س = 2، والمستقيم ص = 2



### 9 – 3 الانسحاب وخواصّه :




الانسحاب هو نقل مجموعة النقاط في المستوى المسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه، فمثلاً يمكن سحب القطعة المستقيمة 3 وحدات جهة اليمين، أو سحبها 5 وحدات إلى الأعلى.

لتكن أ(س، ص) نقطة في المستوى ويراد سحبها مسافة (ل) في اتجاه ما فإنّه يمكن استنتاج القواعد الآتية لانسحاب النقطة أ:

أ(س، ص) ــــانسحاب لليمين / ل وحدةــــ◄ أَ(س+ل، ص)

أ(س، ص) ــــانسحاب لليسار / ل وحدةــــ◄ أَ(س– ل، ص)

أ(س، ص) ــــانسحاب للأعلى / ل وحدةــــ◄ أَ(س، ص+ل)

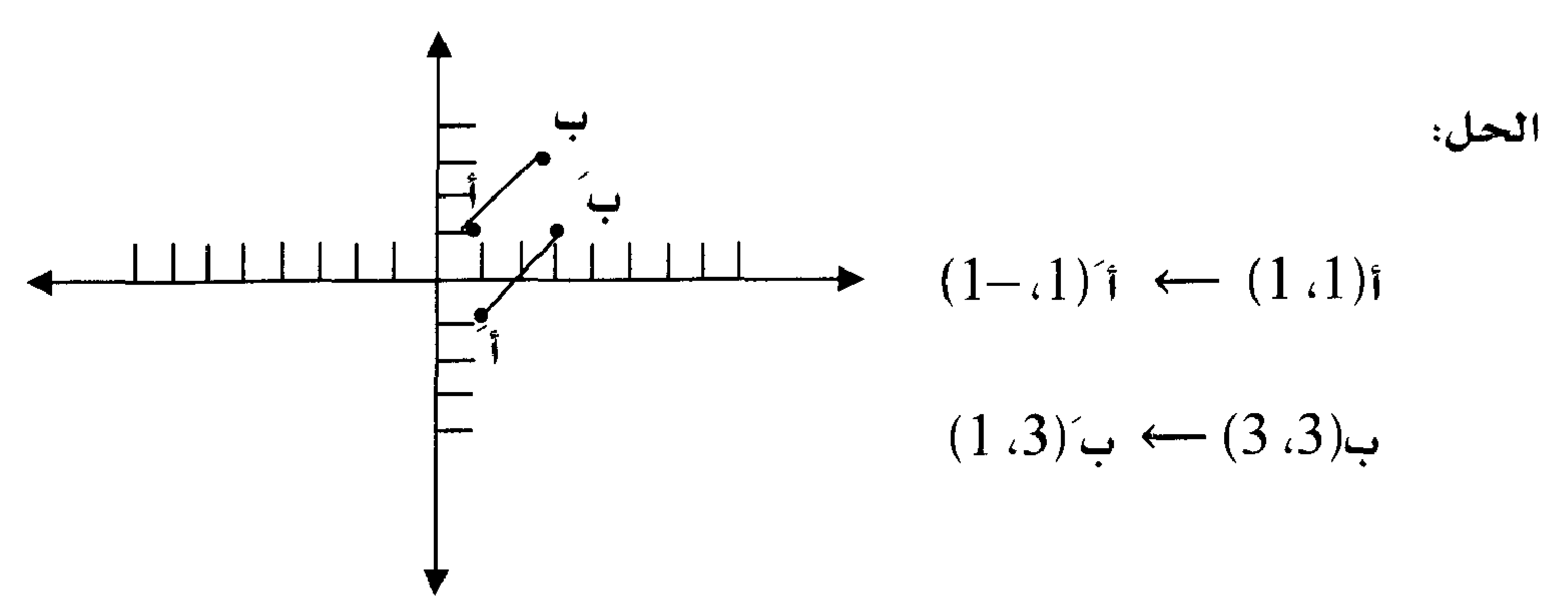
أ(س، ص) ــــانسحاب للأسفل / ل وحدةــــ◄ أَ(س، ص– ل)

**مثال:** **لتكن أ(1، 1)، ب(3، 3)، جد صورة القطعة المستقيمة أ ب بالانسحاب للأسفل وحدتين.**

**الحل:**

أ(1، 1) ⟵ أ َ(1، 1−)

ب(3، 3) ⟵ ب َ(3، 1)




**تدريب:** **جد صورة المثلث أ ب جـ بالانسحاب لليمين 3 وحدات إذا كانت:**

أ(0، 0)، ب(−2، 0)، جـ(−1، 2).

**خواص الانسحاب:**

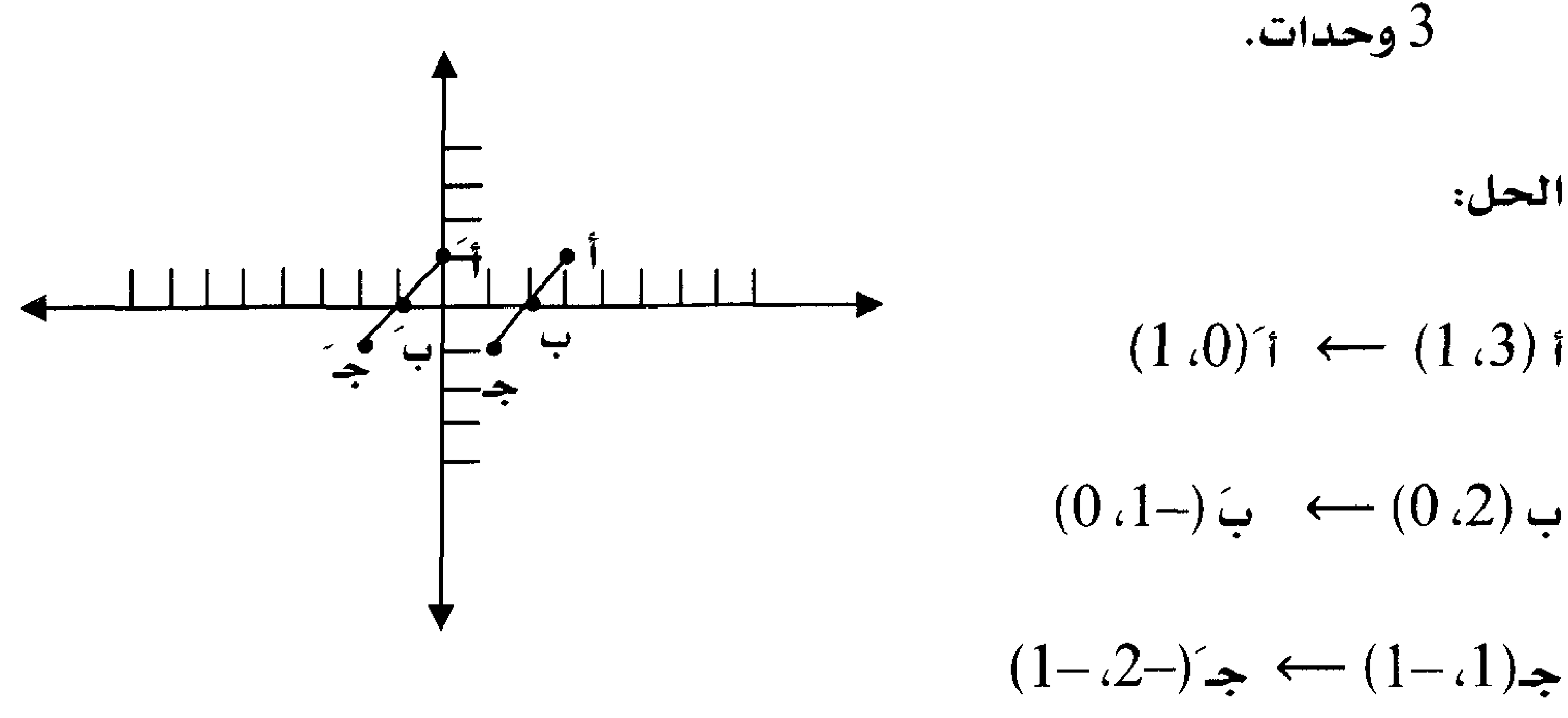
**مثال: جد صورة النقاط المستقيمة أ(3، 1)، ب (2، 0)، جـ(1، −1) بالانسحاب لليسار 3 وحدات.**

**الحل:**

أ (3، 1) ⟵ أ َ(0، 1)

ب (2، 0) ⟵ ب َ (−1، 0)

جـ(1، −1) ⟵ جـ َ(−2، −1)



يمكن استنتاج خواص الانسحاب الآتية:

1) الانسحاب يحافظ على الاستقامة:

النقاط أ، ب، جـ مستقيمة، كذلك النقاط أَ، بَ، جـَ مستقيمة

2) الانسحاب يحافظ على البينية:

النقطة ب تقع بين النقطتين أ، جـ، وكذلك النقطة بَ تقع بين النقطتين أَ، جـَ.

3) الانسحاب يحافظ على قياسات الأطوال:

أ جـ = $\sqrt{(1-3)^2 + (1--1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ وحدة طول.

أَ جـَ = $\sqrt{(2--0)^2 + (1--1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ وحدة طول.

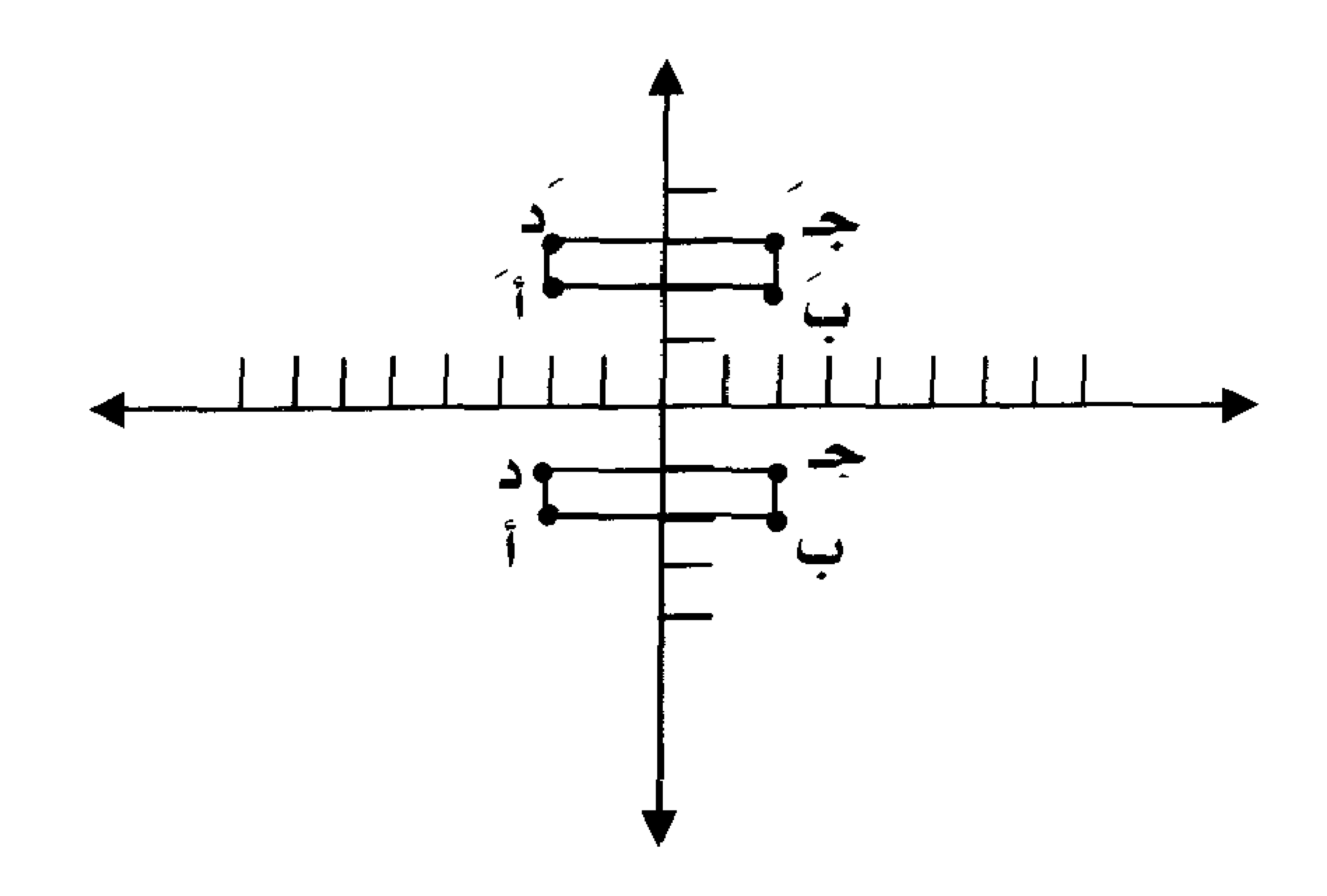
4) الانسحاب يحافظ على قياسات الزوايا:

الزاوية أ ب جـ مستقيمة، وكذلك الزاوية أَبَ جـَ هي زاوية مستقيمة.

مثال: جد صورة المستطيل أ ب جـ د بالانسحاب للأعلى 4 وحدات، إذا كان:

أ (−2، −2)، ب(2، −2)، جـ(2، −1)، د(−2، −1)

**الحل:**




أ$(-2, -2)$ ⟵ أَ$(-2, 2)$

ب$(2, -2)$ ⟵ بَ$(2, 2)$

جـ$(2, -1)$ ⟵ جـَ$(2, 3)$

د$(-2, -1)$ ⟵ دَ$(-2, 3)$

5) **الانسحاب يحافظ على التوازي:**

**أ ب // جـ د، وكذلك أَ بَ // جـَ دَ**

**أ د // ب جـ، وكذلك أَ دَ // بَ جـَ**

6) **الانسحاب يحافظ على الاتجاه الدوراني:**

**يمكن تسمية المستطيل بالاتجاه عكس عقارب الساعة على النحو:**

**أ ب جـ د، وكذلك فإن المستطيل أَ بَ جـَ دَ عكس عقارب الساعة.**

**تدريب: صف الانسحاب الذي تمثّله صور النقط الآتية في المستوى:**

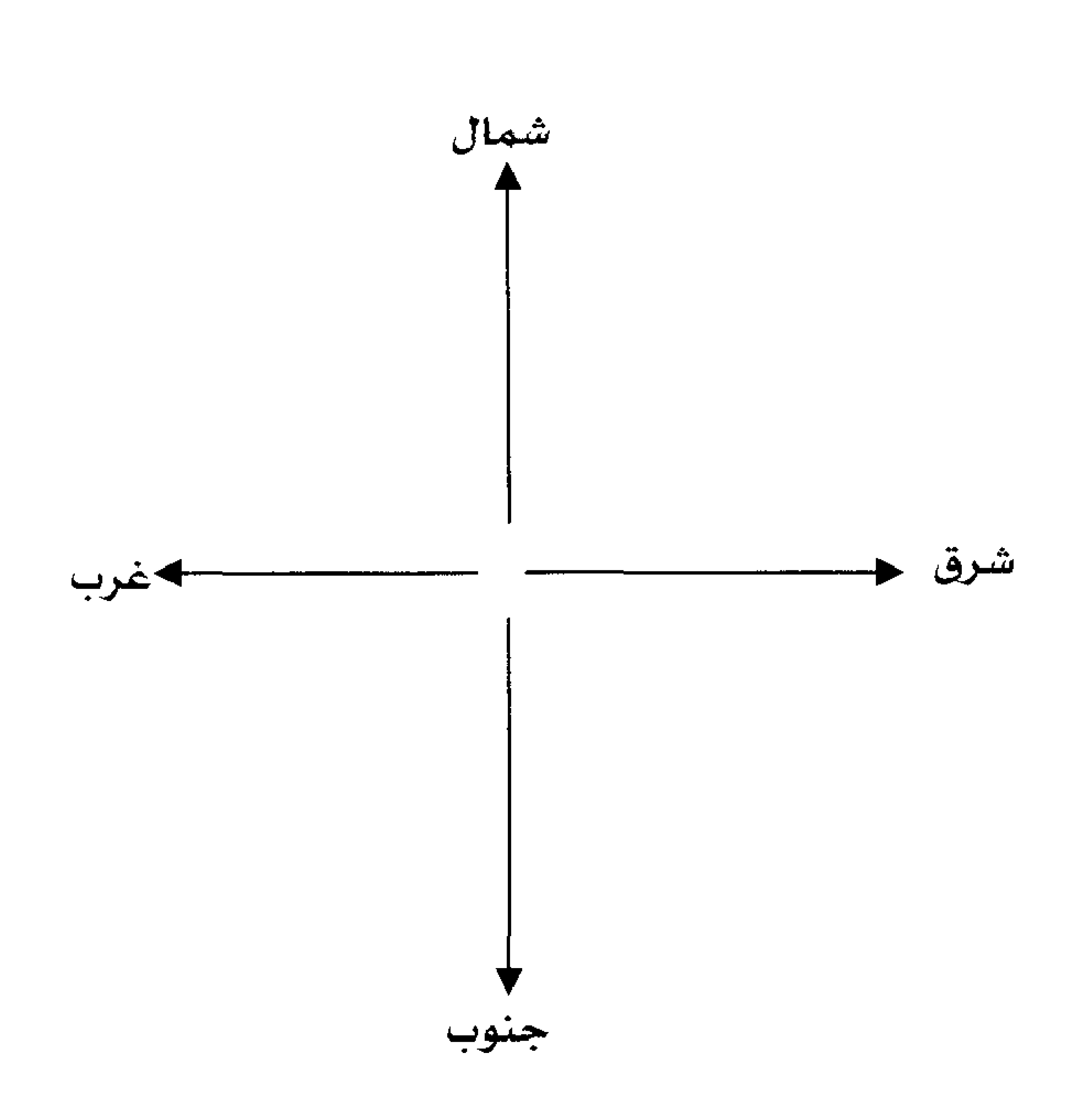
(1) أ $(3, 0)$ ⟵ أَ$(3, -2)$

(2) ب $(1, 2)$ ⟵ بَ $(4, 2)$

(3) جـ$(-1, 4)$ ⟵ جـَ$(-5, 7)$

## 9 – 4 الدوران وخواصّه :

إذا وقف شخص في ساحة ما وكان وجهه نحو الشرق، ثم اتجه يساراً نحو جهة الشمال، فإنه يكون قد دار بعكس عقارب الساعة بزاوية مقدارها °90، وإذا اتجه نحو الغرب، فإنّه يكون قد دار بعكس عقارب الساعة بزاوية مقدارها °180، وإذا اتجه نحو الجنوب فإنه يكون قد دار بعكس عقارب الساعة بزاوية مقدارها °270، وإذا أكمل اتجاهه نحو الشرق، فإنه يكون قد دار دورة كاملة (بزاوية °360)




لتكن أ(س، ص) نقطة في المستوى، فإنّ صورة النقطة أ بالدوران عكس عقارب الساعة هي أ َ، ويكون إحداثيا النقطة أ َحسب زاوية الدوران كما يأتي:

أ(س، ص) ←(دوران °90 عكس عقارب الساعة)← أ َ(– ص، س)

أ(س، ص) ←(دوران °180 عكس عقارب الساعة)← أ َ(– س، – ص)

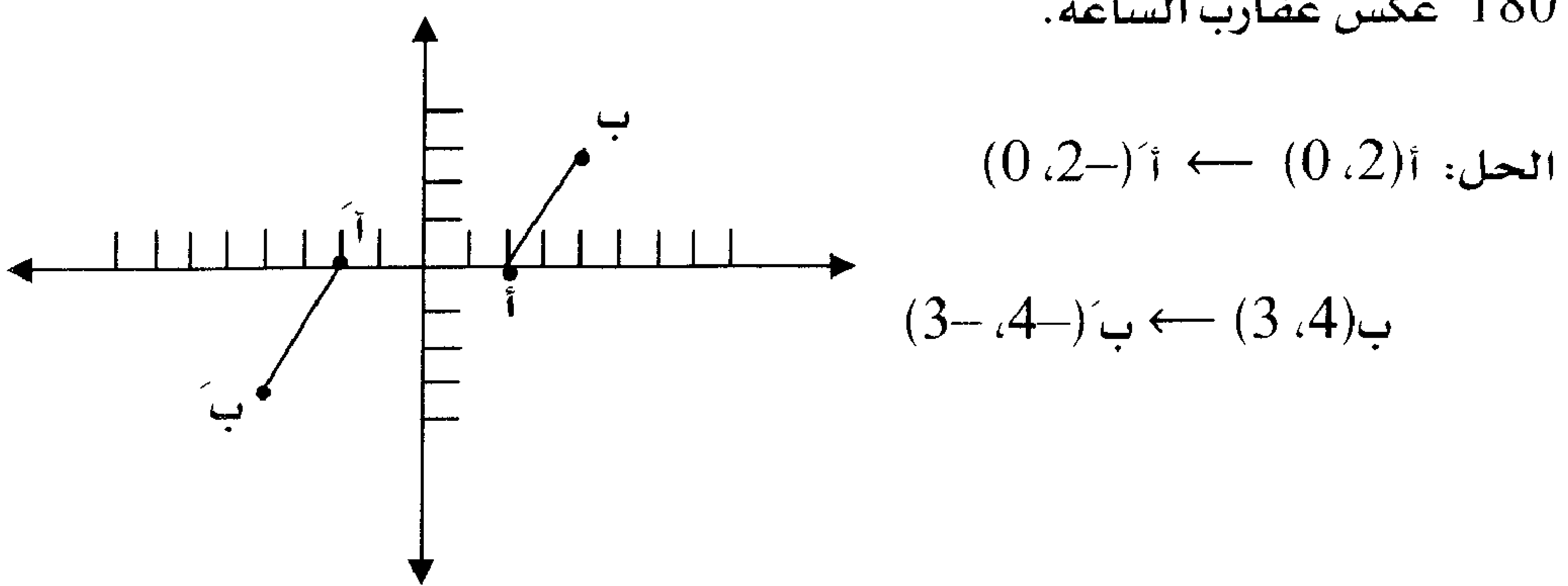
أ(س، ص) ←(دوران °270 عكس عقارب الساعة)← أ َ(ص، – س)

أ(س، ص) ←(دوران °360 عكس عقارب الساعة)← أ َ(س، ص)

مثال: لتكن أ(2، 0)، ب(4، 1)، جد صورة القطعة المستقيمة أ ب بالدوران 180° عكس عقارب الساعة.

الحل: أ(2، 0) ⟵ أَ(−2، 0)

ب(4، 3) ⟵ بَ(−4، −3)




تدريب: جد صورة المثلث أ(−3، 1)، ب(0، 4)، جـ(2، 2) بالدوران 270° عكس عقارب الساعة.

♦ خواصّ الدوران:

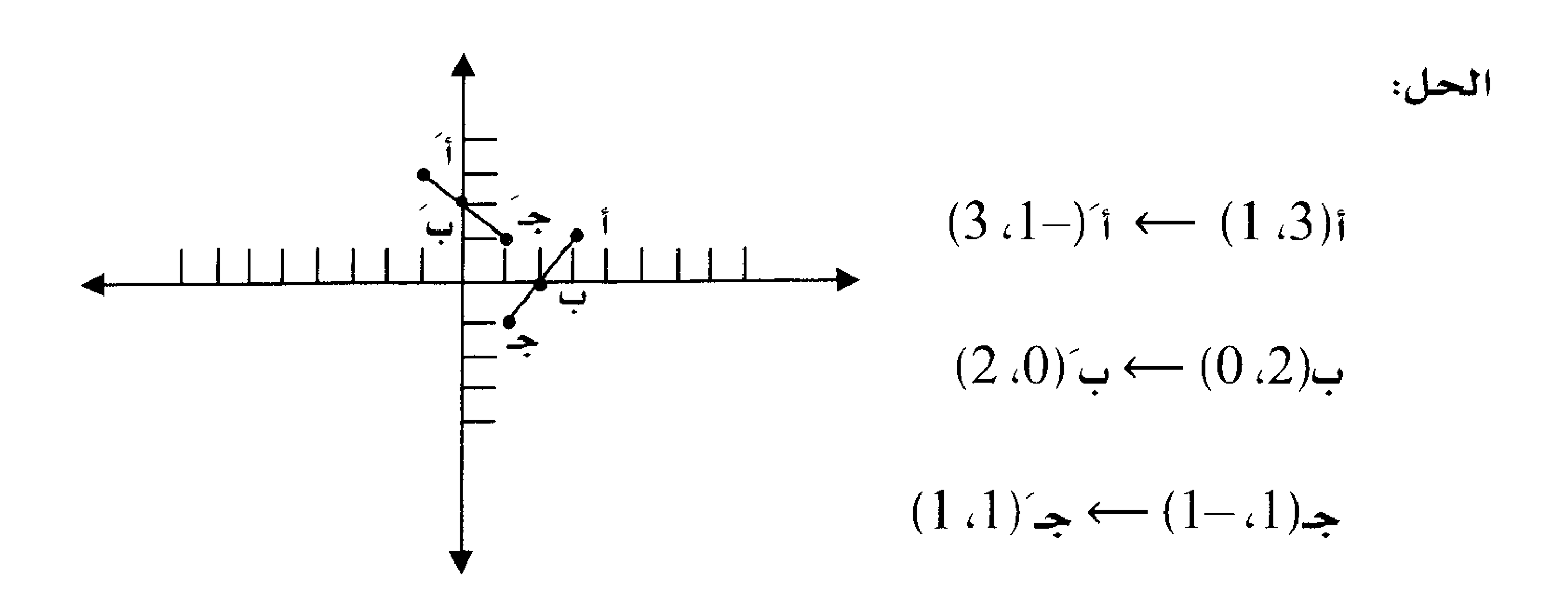
مثال: جد صورة النقاط أ(3، 1)، ب(2، 0)، جـ(1، −1) بالدوران 90° عكس عقارب الساعة.

الحل:

أ(3، 1) ⟵ أَ(−1، 3)

ب(2، 0) ⟵ بَ(0، 2)

جـ(1، −1) ⟵ جـَ(1، 1)



يمكن استنتاج خواص الدوران الآتية:

(1) الدوران يحافظ على الاستقامة.

النقاط أ، ب، جـ مستقيمة، كذلك النقاط أَ، بَ، جـَ مستقيمة.

(2) الدوران يحافظ على البينية.

النقطة ب تقع بين النقطتين أ، جـ، وكذلك النقطة بَ تقع بين النقطتين أَ، جـَ

(3) الدوران يحافظ على قياسات الأطوال.

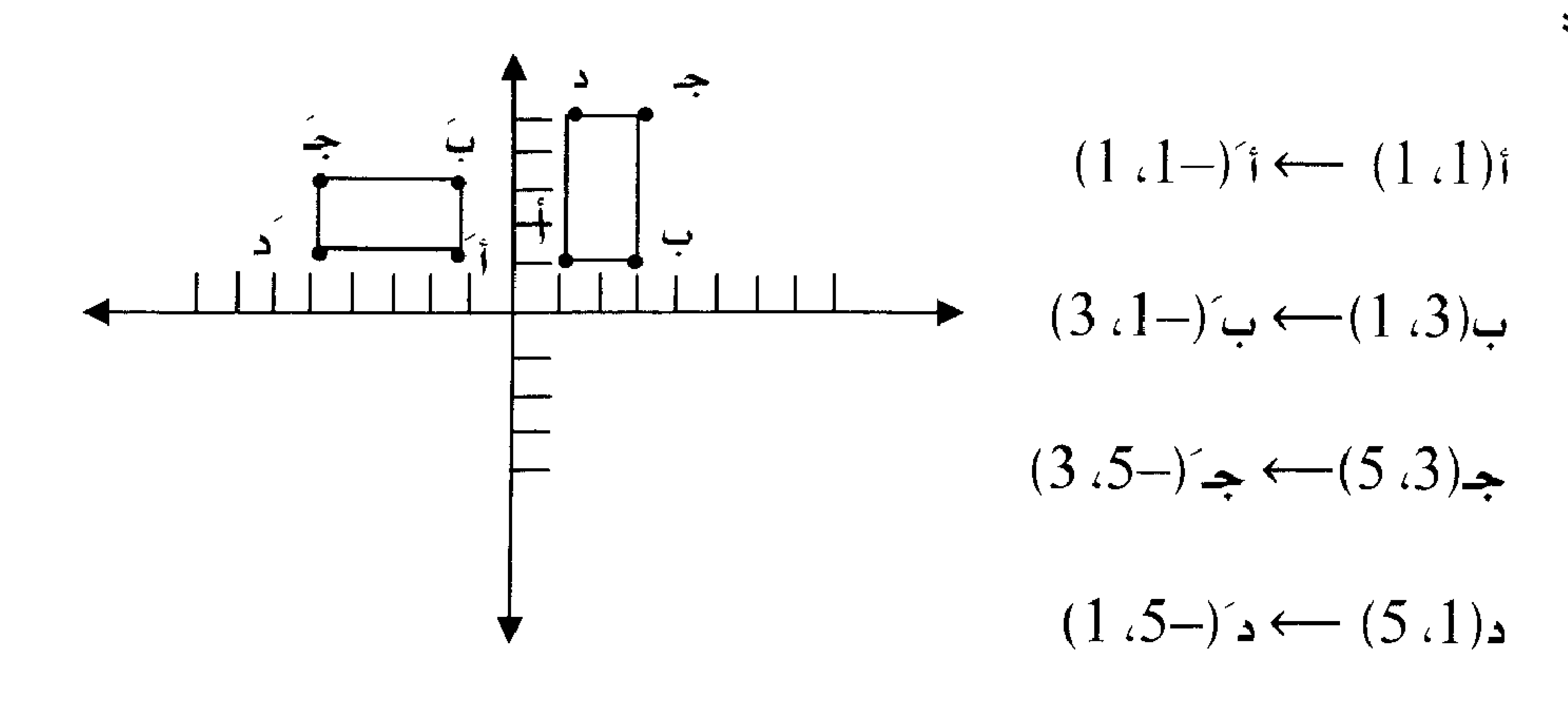
أ ب = أَ بَ، ب جـ = بَ جـَ، أ جـ = أَ جـَ (تحقّق من ذلك).

(4) الدوران يحافظ على قياسات الزوايا.

الزاوية أ ب جـ مستقيمة، وكذلك الزاوية أَ بَ جـَ هي زاوية مستقيمة.

مثال: جد صورة المستطيل أ ب جـ د بالدوران $90^\circ$ عكس عقارب الساعة، إذا كان أ(1، 1)، ب(3، 1)، جـ(3، 5)، د(1، 5)

الحل:




أ(1، 1) ⟵ أَ(−1، 1)

ب(3، 1) ⟵ بَ(−1، 3)

جـ(3، 5) ⟵ جـَ(−5، 3)

د(1، 5) ⟵ دَ(−5، 1)

(5) **الدوران يحافظ على التوازي**

أ ب // جـ د، وكذلك أَ بَ // جَـ دَ

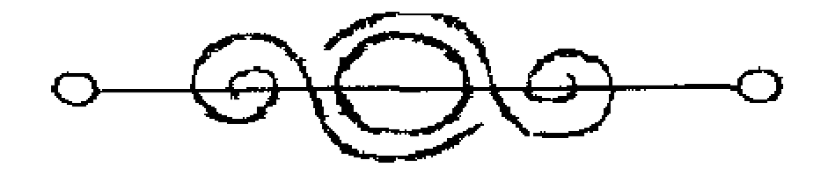
أ د // ب جـ ، وكذلك أَ دَ // بَ جَـ

(6) **الدوران يحافظ على الاتجاه الدوراني**

**يمكن تسمية المستطيل بالاتجاه عكس عقارب الساعة على النحو: أ ب جـ د**

**وكذلك فإن المستطيل أَ بَ جَـ دَ عكس عقارب الساعة.**

**تدريب:** جد صورة المربع س ص ع ل بالدوران 360° عكس عقارب الساعة، إذا كان أ(2، 2)، ب(–2، 2)، جـ(– 2، – 2)، د(2، – 2)



## 9–5 *التمدّد وخواصّه:*

**نحتاج في كثير من الأحيان إلى تمثيل شيء حقيقي بأبعاد محدّدة من خلال رسمه على ورقة، مع مراعاة الاحتفاظ بنسب الأبعاد الواردة في الشيء الحقيقي، فنلجأ إلى تكبير الشيء إذا كان صغيراً مثل الأحياء الدقيقة التي لا ترى إلّا بالمجهر، ونلجأ أحياناً إلى تصغير الشيء إذا كان كبيراً مثل رسم بيت على ورقة، كما نلجأ في أحيان أخرى إلى المحافظة على الأبعاد الحقيقية كما هي.**

**وتتطلّب العمليات السابقة تحديد ما يسمّى معامل التمدّد (م) الذي من خلال قيمته يمكن الحكم على الشكل أنّه مكبّر أو مصغّر أو محافظ على الأبعاد الحقيقية، فإذا كانت م > 1 فالشكل يكون مكبّراً، وإذا كانت م < 1 فيكون الشكل مصغّراً، وإذا كانت م = 1 فالشكل يحافظ على أبعاده الحقيقية.**

- **تعريف:**

صورة النقطة أ(س، ص) تحت تأثير التمدّد الذي معامله (م) هي:

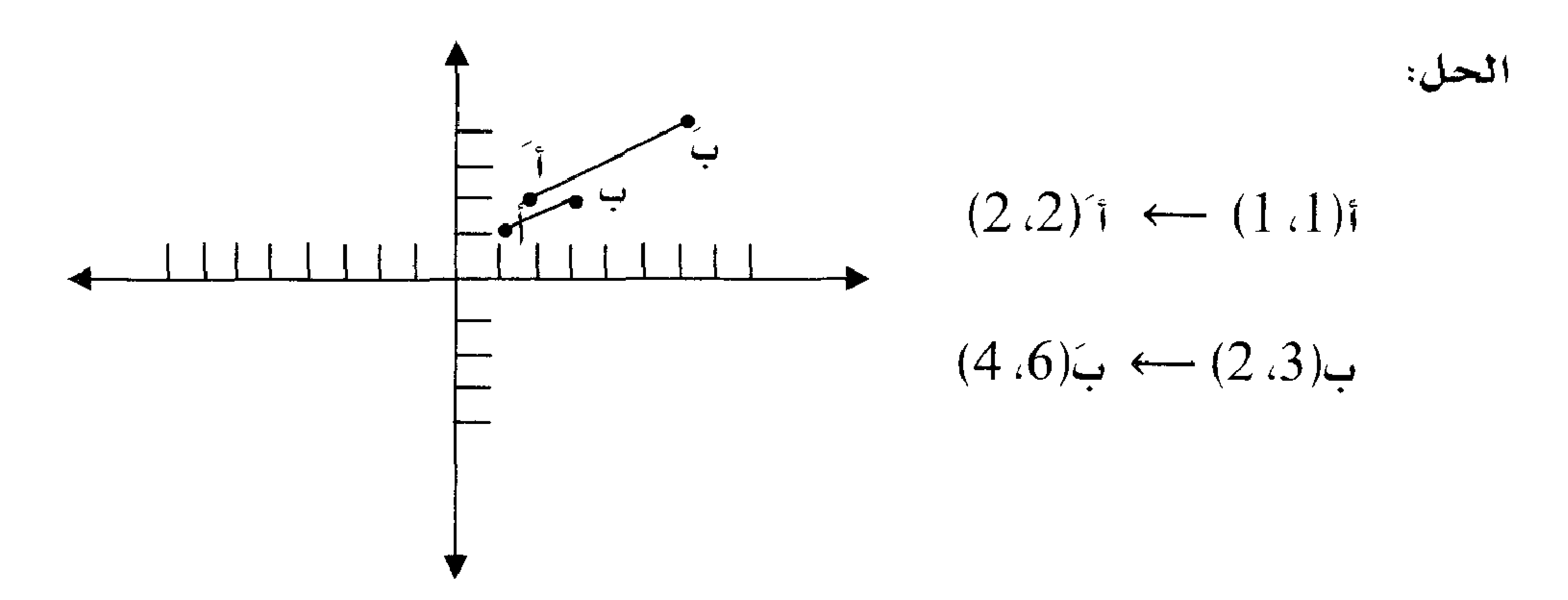
أَ(م س، م ص)

**مثال:** جد صورة القطعة المستقيمة أ ب تحت تأثير التمدّد الذي معامله 2، إذا كانت: أ(1، 1)، ب(3، 2).

الحل:

أ(1، 1) ⟵ أَ(2، 2)

ب(3، 2) ⟵ بَ(6، 4)




تدريب: جد صورة المثلث أ ب جـ تحت تأثير التكبير الذي معامله3، إذا كانت:

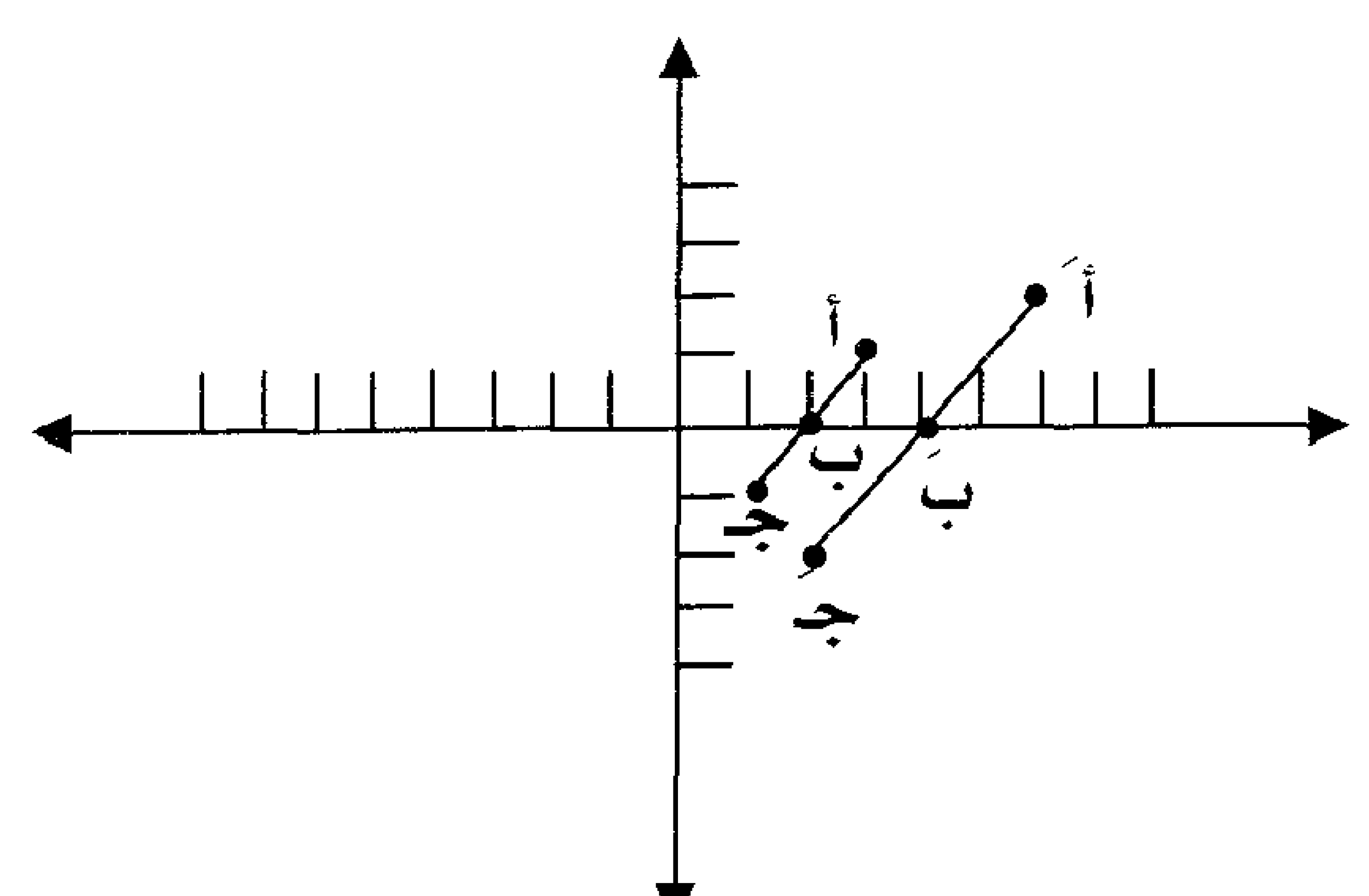
أ(−1، 1)، ب(2، 2)، جـ(0، 3).

- **خواصّ التمدّد:**

**مثال:** جد صورة النقاط أ(3، 1)،

ب(2، 0)، جـ(1، −1)

**الحل:**




أ(3، 1)　　أَ(6، 2)

ب(2، 0)　　بَ(4، 0)

جـ(1، −1)　　جَ(2، −2)

**يمكن استنتاج خواصّ التمدد الآتية:**

(1) **التمدّد يحافظ على الاستقامة**

**النقاط أ، ب، جـ مستقيمة، كذلك النقاط أَ، بَ، جَ مستقيمة.**

(2) **التمدّد يحافظ على البينية**

**النقطة ب بين النقطتين أ، جـ، كذلك النقطة بَ بين النقطتين أَ، جَ.**

(3) التمدّد لا يحافظ على قياسات الأطوال

أ ب = $\sqrt{(2-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ وحدة طول

أَ بَ = $\sqrt{(4-6)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ وحدة طول

لاحظ أنّ أَ بَ = أ ب × (معامل التمدّد)

تدريب: احسب طول أ جـ، أَ جـَ وقارن بينهما.

(4) التمدّد يحافظ على قياسات الزوايا.

الزاوية أ ب جـ مستقيمة وكذلك الزاوية أَ بَ جـَ هي زاوية مستقيمة.

مثال: جد صورة المربع أ ب جـ د تحت تأثير تمدّد معامله 1.5، إذا كانت أ(2، 2)، ب(−2، 2)، جـ(−2، −2)، د(2، −2).

الحل:

أ(2، 2) ⟵ أَ(3، 3)

ب(−2، 2) ⟵ بَ(−3، 3)

جـ(−2، −2) ⟵ جـَ(−3، −3)

د(2، −2) ⟵ دَ(3، −3)

(5) التمدّد يحافظ على التوازي

آ ب // جـ د، كذلك أَ بَ // جَ دَ

أ د // ب جـ، كذلك أَ دَ // بَ جَ

(6) التمدّد يحافظ على الاتجاه الداوراني:

يمكن تسمية المربع باتجاه عكس عقارب الساعة على الشكل: أ ب جـ د، وكذلك فإن المربّع آَ بَ جَ دَ عكس عقارب الساعة.

تدريب: احسب مساحة المربع آ ب جـ د، ومساحة المربع أَ بَ جَ دَ .

لاحظ أن:

مساحة المربع بعد التمدّد = (معامل التمدّد)$^2$ × مساحة المربع قبل التمدّد

مثال: جد صورة المثلث أ ب جـ تحت تأثير تمدّد معامله $\frac{1}{2}$ ، إذا كانت:

أ(2، 2)، ب(0، 4)، جـ(−2، 2).

الحل:

أ(2، 2) ⟵ أَ(1، 1)

ب(0، 4) ⟵ بَ(0، 2)

جـ(−2، 2) ⟵ جَ(−1، 1)

لاحظ أن:

مساحة المثلث أ ب جـ = $2 \times 4 \times \frac{1}{2}$

= 4 وحدة مساحة

مساحة المثلث أَ بَ جَ = $1 \times 2 \times \frac{1}{2}$

= 1 وحدة مساحة

أي أن مساحة المثلث أَ بَ جَ = $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times$ مساحة المثلث أ ب جـ.

= $\frac{1}{4}$ مساحة المثلث أ ب جـ.

### 9–6 أسئلة للمناقشة :

**1.** ليكن ت(س، ص) = (5س – 2، ص + 4) تحويلاً هندسياً .

1) جد ت(1، 3) ، ت(0، – 4) ، ت(– 1، 2)

2) إذا كان ت(س، ص) = (0، 0) جد قيمة (س، ص).

**2.** صف الانعكاس الذي تمثّله صور النقاط الآتية في المستوى:

أ(3، – 7) ⟵ أ َ(– 3، – 7)

ب(2، 1) ⟵ بَ(2، – 1)

**3.** جد صورة المثلث س ص ع بالانعكاس في محور السينات إذا كانت

س(1، 5) ، ص(4، 0) ، ع(1، – 5).

**4.** صف الانسحاب الذي تمثّله صور النقاط الآتية في المستوى:

أ(4، –1) ⟵ أ َ(4، 3)

ب(0، 5) ⟵ بَ(– 3، 5)

جـ(2، –4) ⟵ جَـ(7، –7)

**5.** لتكن أ ب قطعة مستقيمة فيها أ(3، 1)، ب(–2، 2) جد صورة القطعة المستقيمة بالانعكاس في محور الصادات ثم الانسحاب إلى الأعلى وحدتين.

6. إذا كان أ ب جـ مثلثاً متساوي الأضلاع، حدّد ثلاثة انعكاسات، يشكّل كلّ منها تماثلاً للمثلث أ ب جـ.

7. جد صورة شبه المنحرف أ ب جـ د بالدوران $90^\circ$ عكس عقارب الساعة، إذا كان أ(−1، −1)، ب(1، 1)، جـ(5، 9)، د(−3، 1)

8. إذا كان أ ب جـ د مربّع طول ضلعه 5 سم، وكان أَ بَ جَ دَ صورة المربع أ ب جـ د تحت تأثير تمدّد معامله 3، جد:

   1. طول أَ بَ
   2. طول أَ جَ
   3. مساحة المربّع أَ بَ جَ دَ.

9. لتكن أ ب قطعة مستقيمة، أَ بَ صورة القطعة المستقيمة أ ب تحت تأثير تمدّد معامله 2.5، إذا كانت أَ(10، 15)، بَ(0، 2.5)، جد إحداثيي النقطتين أ، ب.

# الفصل التاسع

# المصادر والمراجع


- أبو زينة، فريد (2010). تطوير مناهج الرياضيات المدرسية وتعليمها. ط1. عمّان، دار وائل للنشر.
- أبو لوم، خالد (2005). الهندسة وأساليب تدريسها. ط1 .عمّان، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة.
- الأمين، إسماعيل محمد (2013). تاريخ الهندسة. متوفر:
http://mohammedragab15.arabblogs.com/archive/2008/3/5 13811.html
- الحموز، صادق وآخرون (2004). التراكيب المتقطعة. ط1. عمّان، مجمع اللغة العربية الأردني.
- الحياتي، جاسم (1981). الهندسة الوصفية. العراق، الجامعة التكنولوجية.
- راشد، محمد والزعبي، عبد الله وإبراهيم، عاهد (1989). مبادئ الهندسة الحديثة المستوية والفضائية. ط1 . عمّان، دار عمّار للنشر والتوزيع.
- سعد الله، أبو بكر خالد (2001). في الإنشاء الهندسي وأشياء أخرى. الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية.
- عوض، عدنان و ضبيط، إلياس و داود، مروان الحاج (2002). تاريخ الرياضيات. ط1. عمّان، منشورات جامعة القدس المفتوحة.
- غصيب، هشام (2013). طبيعة هندسة إقليدس والهندسات البديلة. متوفر: http://www.ahewar.org/debat/show.art.asp?aid=289387
- وزارة التربية والتعليم (2008). كتب الرياضيات المدرسية لمرحلة التعليم الأساسي. عمّان.

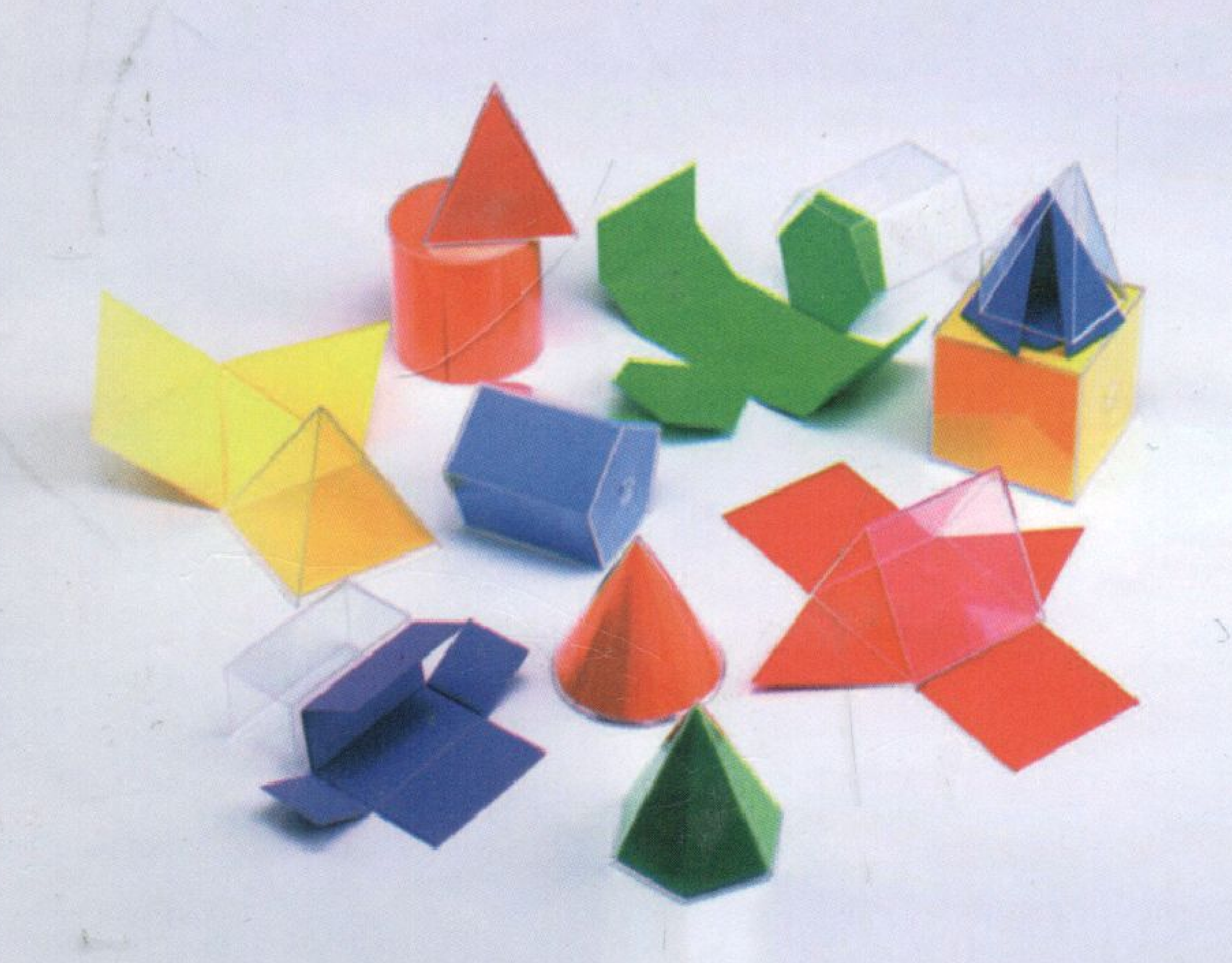
- Aledo, J. A.; Cortés, J. C.; and Pelayo, F. L. (2000). A Study of Two Classic Methods of Approximate Construction of Regular Polygons by Using Mathematica. Mathematics in Education. 9, 12-19.
- Ball, W. W. R. and Coxeter, H. S. M. (1987). Mathematical Recreations and Essays, 13th ed. New York: Dover.
- Conway, J. H. and Guy, R. K. (1996). The Book of Numbers. New York: Springer-Verlag.
- Coolidge, J. L. (1971). Famous Problems in Construction. New York: Chelsea.
- Dummit, D. S. and Foote, R. M. (1998). Abstract Algebra, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Harris, J. W. and Stocker, H. (19980. Handbook of Mathematics and Computational Science. New York: Springer-Verlag.
- Kostovskii, A.(1986). Geometrical Constructions with compasses only. Mir, Moscow.
- Martin, G. E.(1998). Geometric Constructions. New York: Springer-Verlag.
- Posamentier, A. S. and Wernick, W. (1988). Advanced Geometric Constructions. Palo Alto, CA: Dale Seymour.
- Steinhaus, H.(1999). Mathematical Snapshots, 3rd ed. New York: Dover.
- Sykes, M. (1997). Source Book of Problems for Geometry. Palo Alto, CA: Dale Seymour.
- Weisstein, E. W. (2012). "Books about Geometric Construction." http://www.ericweisstein.com/encyclopedias/books/GeometricConstruction.html

# المصادر والمراجع

# المصادر والمراجع


دار الإعصار العلمي للنشر والتوزيع

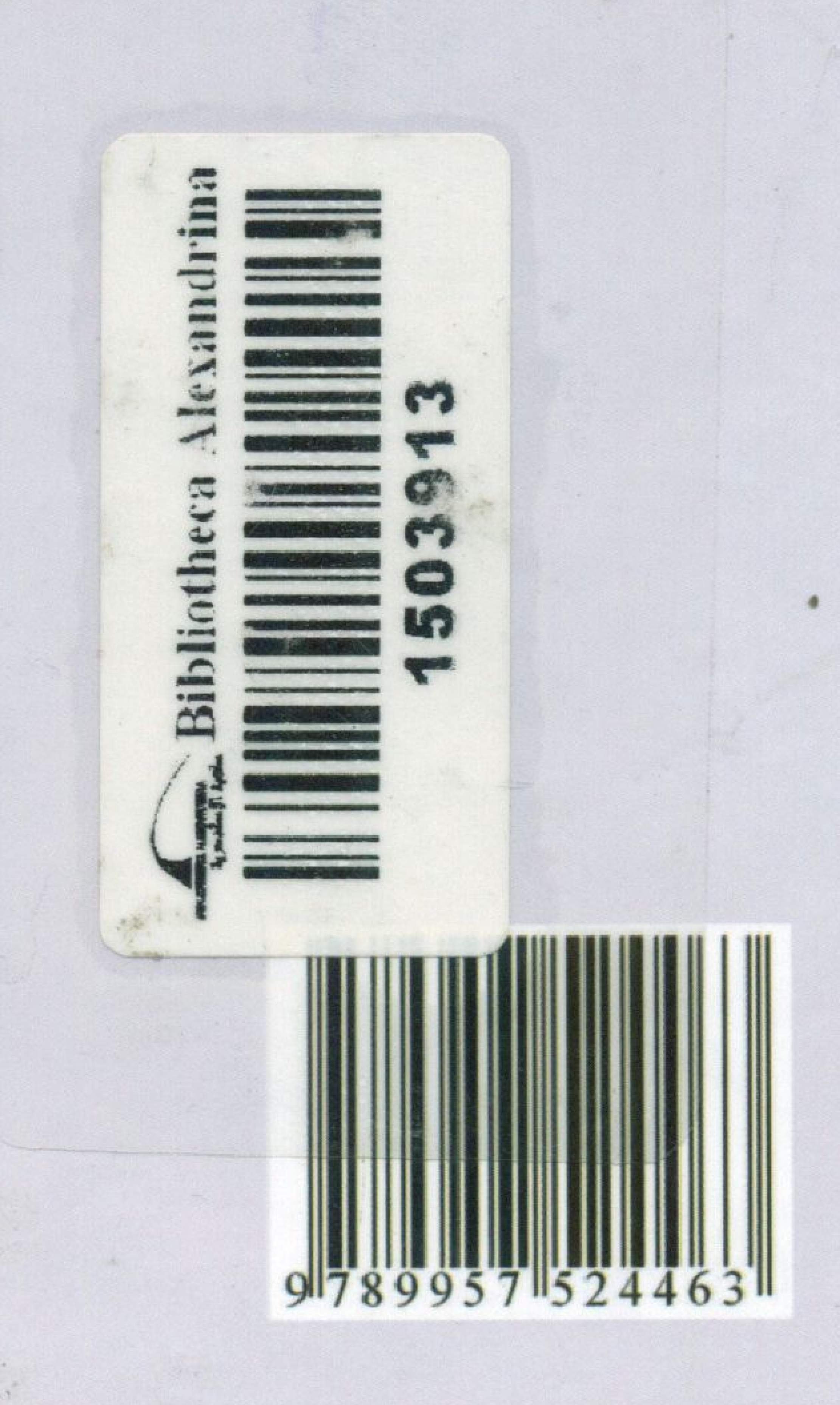

دار الإعصار العلمي للنشر والتوزيع



مفاهيم أساسية في

# الهندسة

( لطلبة كليات العلوم التربوية )







دار الإعصار العلمي للنشر والتوزيع

الاردن - عمان - مرج الحمام - شارع الكنيسة - مقابل كلية القدس

هاتف 0096265713906 فاكس 0096265713907

جوال : 00962-797950880

dar_aleasar@hotmail.com